



Aufgabe 1 – Rücklage für eine Betriebserweiterung (20 Punkte)

Frau Neumann betreibt eine kleine Kaffeerösterei und spart für eine spätere Erweiterung.

- a) Berechnen Sie die Endkapitalien von 8.000,00 € nach 8 Jahren bei 5 % p. a. sowie von 6.000,00 € nach 10 Jahren bei 4 % p. a. (6 P.)
- b) 8.000,00 € sollen in 8 Jahren auf 10.000,00 € anwachsen. Berechnen Sie den erforderlichen Zinssatz. (5 P.)
- c) Wie lange dauert es bei 5 % p. a., bis 8.000,00 € auf 10.000,00 € angewachsen sind? (4 P.)
- d) Ein Geschäftspartner legt 5.000,00 € zu 4 % p. a. an. Eine Kollegin legt 6.250,00 € zum gleichen Zinssatz 6 Jahre an. Nach wie vielen Jahren erreicht der Geschäftspartner denselben Endwert? (5 P.)

Aufgabe 2 – Investitionsrücklage (12 Punkte)

Für neue Betriebsgeräte sollen in 8 Jahren 15.000,00 € zur Verfügung stehen. Eine Bank bietet 5 % p. a.

- a) Berechnen Sie den Betrag, der heute einmalig angelegt werden muss. (7 P.)
- b) Wie viel Prozent des späteren Betrags sind heute einzuzahlen? Formulieren Sie das Ergebnis als verständlichen Kundensatz. (5 P.)

Aufgabe 3 – Zwei Zinsphasen (18 Punkte)

Ein Betrieb legt 8.000,00 € an: zunächst 3 Jahre zu 4 % p. a., danach 5 Jahre zu 6 % p. a.

- a) Berechnen Sie das Endkapital. Prüfen Sie, ob dies einer durchgängigen Verzinsung von 5,25 % p. a. über 8 Jahre entspricht. (9 P.)
- b) Danach soll ein Kapital von 16.000,00 € erreicht werden. Variante 1: weitere Anlage zu 6 % p. a. – wie lange dauert dies? Variante 2: Das Ziel soll nach genau 4 weiteren Jahren erreicht werden – welcher Zinssatz ist erforderlich? (9 P.)

Aufgabe 4 – Wachstumsziele (16 Punkte)

- a) Nach wie vielen Jahren verdoppelt sich ein Kapital bei 6 % p. a.? Nach wie vielen Jahren ist ein Kapital bei 8 % p. a. um 80 % gestiegen? (8 P.)
- b) Welcher Zinssatz ist für eine Verdopplung in 12 Jahren bzw. für eine Verdreifachung in 15 Jahren nötig? (8 P.)

**Aufgabe 5 – Vergleich von Zahlungsplänen (24 Punkte)**

Frau Neumann möchte Röst- und Verpackungsmaschinen anschaffen. Drei Anbieter schlagen unterschiedliche Zahlungspläne vor. Vergleichszeitpunkt ist Ende 2026 (K_0). Alle Zahlungen erfolgen am Jahresende. Für die Jahre bis einschließlich 2026 beträgt der Zinssatz 2 % p. a.; für die Jahre ab 2027 4 % p. a.

Jahr	2022	2023	2024	2025	2026	2027	2028	2029
n	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
Anbieter A	–	–	1.500 €	–	1.500 €	1.500 €	1.500 €	1.500 €
Anbieter B	–	2.000 €	–	2.000 €	–	2.000 €	–	2.000 €
Anbieter C	2.500 €	–	–	–	2.500 €	–	2.500 €	–

- a) Berechnen Sie für jeden Anbieter den Wert sämtlicher Zahlungen zum Vergleichszeitpunkt Ende 2026 (K_0). (12 P.)
- b) Berechnen Sie anschließend für jeden Anbieter den Wert K_3 am Ende des Jahres 2029. (6 P.)
- c) Welcher Anbieter ist aus rein finanzieller Sicht am günstigsten? Begründen Sie Ihre Wahl. (6 P.)

**Aufgabe 1 – Rücklage für eine Betriebserweiterung (20 Punkte)**

Herr Weber betreibt ein regionaler gartenbaubetrieb und spart für eine spätere Erweiterung.

- a) Berechnen Sie die Endkapitalien von 9.000,00 € nach 6 Jahren bei 4 % p. a. sowie von 7.000,00 € nach 9 Jahren bei 5 % p. a. (6 P.)
- b) 9.000,00 € sollen in 6 Jahren auf 12.000,00 € anwachsen. Berechnen Sie den erforderlichen Zinssatz. (5 P.)
- c) Wie lange dauert es bei 4 % p. a., bis 9.000,00 € auf 12.000,00 € angewachsen sind? (4 P.)
- d) Ein Geschäftspartner legt 6.000,00 € zu 5 % p. a. an. Eine Kollegin legt 7.500,00 € zum gleichen Zinssatz 8 Jahre an. Nach wie vielen Jahren erreicht der Geschäftspartner denselben Endwert? (5 P.)

Aufgabe 2 – Investitionsrücklage (12 Punkte)

Für neue Betriebsgeräte sollen in 10 Jahren 18.000,00 € zur Verfügung stehen. Eine Bank bietet 4 % p. a.

- a) Berechnen Sie den Betrag, der heute einmalig angelegt werden muss. (7 P.)
- b) Wie viel Prozent des späteren Betrags sind heute einzuzahlen? Formulieren Sie das Ergebnis als verständlichen Kundensatz. (5 P.)

Aufgabe 3 – Zwei Zinsphasen (18 Punkte)

Ein Betrieb legt 7.500,00 € an: zunächst 4 Jahre zu 3 % p. a., danach 4 Jahre zu 7 % p. a.

- a) Berechnen Sie das Endkapital. Prüfen Sie, ob dies einer durchgängigen Verzinsung von 5,00 % p. a. über 8 Jahre entspricht. (9 P.)
- b) Danach soll ein Kapital von 15.000,00 € erreicht werden. Variante 1: weitere Anlage zu 7 % p. a. – wie lange dauert dies? Variante 2: Das Ziel soll nach genau 5 weiteren Jahren erreicht werden – welcher Zinssatz ist erforderlich? (9 P.)

Aufgabe 4 – Wachstumsziele (16 Punkte)

- a) Nach wie vielen Jahren verdoppelt sich ein Kapital bei 5 % p. a.? Nach wie vielen Jahren ist ein Kapital bei 10 % p. a. um 60 % gestiegen? (8 P.)
- b) Welcher Zinssatz ist für eine Verdopplung in 10 Jahren bzw. für eine Verdreifachung in 20 Jahren nötig? (8 P.)

Aufgabe 5 – Vergleich von Zahlungsplänen (24 Punkte)

Herr Weber möchte Gewächshaus- und Bewässerungstechnik anschaffen. Drei Anbieter schlagen unterschiedliche Zahlungspläne vor. Vergleichszeitpunkt ist Ende 2026 (K_0). Alle Zahlungen erfolgen am Jahresende. Für die Jahre bis einschließlich 2026 beträgt der Zinssatz 3 % p. a.; für die Jahre ab 2027 5 % p. a.

Jahr	2022	2023	2024	2025	2026	2027	2028	2029
n	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
Anbieter A	–	–	1.800 €	–	1.800 €	1.800 €	1.800 €	1.800 €
Anbieter B	–	2.200 €	–	2.200 €	–	2.200 €	–	2.200 €
Anbieter C	3.000 €	–	–	–	3.000 €	–	3.000 €	–

- a) Berechnen Sie für jeden Anbieter den Wert sämtlicher Zahlungen zum Vergleichszeitpunkt Ende 2026 (K_0). (12 P.)
- b) Berechnen Sie anschließend für jeden Anbieter den Wert K_3 am Ende des Jahres 2029. (6 P.)
- c) Welcher Anbieter ist aus rein finanzieller Sicht am günstigsten? Begründen Sie Ihre Wahl. (6 P.)

Musterlösung – Version 1

Aufgabe 1 (20 Punkte)

- a) $K_n = K_0 \cdot (1 + p/100)^n$. Ergebnis 1: $8.000,00 \text{ €} \cdot (1 + 5/100)^8 = 11.819,64 \text{ €}$; Ergebnis 2: $6.000,00 \text{ €} \cdot (1 + 4/100)^{10} = 8.881,47 \text{ €}$. (je 3 P.)
- b) $p = ((K_n/K_0)^{(1/n)} - 1) \cdot 100 = ((10000/8000)^{(1/8)} - 1) \cdot 100 = 2,83 \text{ \%}$. (5 P.)
- c) $n = \ln(K_n/K_0) / \ln(1 + p/100) = 4,57$ Jahre. Bei vollen Zinsjahren wird das Ziel erstmals nach 5 Jahren erreicht. (4 P.)
- d) $5000 \cdot (1 + 4/100)^n = 6250 \cdot (1 + 4/100)^6$; $n = 6 + \ln(6250/5000) / \ln(1 + 4/100) = 11,69$ Jahre. (5 P.)

Aufgabe 2 (12 Punkte)

- a) $K_0 = K_n / (1 + p/100)^n = 15000 / (1 + 5/100)^8 = 10.152,59 \text{ €}$. (7 P.)
- b) $10.152,59 \text{ €} / 15.000,00 \text{ €} \cdot 100 = 67,68 \text{ \%}$. Kundensatz: Sie müssen heute rund 67,68 % der gewünschten späteren Summe einmalig einzahlen. (5 P.)

Aufgabe 3 (18 Punkte)

- a) $K = 8000 \cdot (1 + 4/100)^3 \cdot (1 + 6/100)^5 = 12.042,57 \text{ €}$. Bei konstant 5,25 %: 12.046,66 €. Die Werte sind nicht gleich; der tatsächlich äquivalente konstante Zinssatz ist 5,25 %. (9 P.)
- b) Variante 1: $n = \ln(16000/12042,57) / \ln(1 + 6/100) = 4,88$ Jahre (bei vollen Jahren: 5). Variante 2: $p = ((16000/12042,57)^{(1/4)} - 1) \cdot 100 = 7,36 \text{ \%}$. (9 P.)

Aufgabe 4 (16 Punkte)

- a) Verdopplung: $n = \ln(2)/\ln(1 + 6/100) = 11,90$ Jahre. Wachstum um 80 %: $n = \ln(1,80)/\ln(1 + 8/100) = 7,64$ Jahre. (je 4 P.)
- b) Verdopplung: $p = (2^{(1/12)} - 1) \cdot 100 = 5,95 \text{ \%}$. Verdreifachung: $p = (3^{(1/15)} - 1) \cdot 100 = 7,60 \text{ \%}$. (je 4 P.)

Aufgabe 5 (24 Punkte)

Anbieter A: $K_0 = 1500 \cdot (1+2/100)^2 + 1500 \cdot 1 + 1500 \cdot 1/(1+4/100)^1 + 1500 \cdot 1/(1+4/100)^2 + 1500 \cdot 1/(1+4/100)^3 = 7.223,24 \text{ €}$. (4 P.)

Anbieter B: $K_0 = 2000 \cdot (1+2/100)^3 + 2000 \cdot (1+2/100)^1 + 2000 \cdot 1/(1+4/100)^1 + 2000 \cdot 1/(1+4/100)^3 = 7.863,49 \text{ €}$. (4 P.)

Anbieter C: $K_0 = 2500 \cdot (1+2/100)^4 + 2500 \cdot 1 + 2500 \cdot 1/(1+4/100)^2 = 7.517,47 \text{ €}$. (4 P.)

b) Für alle Anbieter gilt $K_3 = K_0 \cdot (1 + \text{Zinssatz ab 2027})^3$:

Anbieter A: $K_3 = 7.223,24 \text{ €} \cdot (1 + 4/100)^3 = 8.125,16 \text{ €}$. (2 P.)

Anbieter B: $K_3 = 7.863,49 \text{ €} \cdot (1 + 4/100)^3 = 8.845,35 \text{ €}$. (2 P.)

Anbieter C: $K_3 = 7.517,47 \text{ €} \cdot (1 + 4/100)^3 = 8.456,13 \text{ €}$. (2 P.)

c) Anbieter A ist finanziell am günstigsten, da sein auf Ende 2026 abgezinstes bzw. auf Ende 2029 aufgezinster Gesamtwert am niedrigsten ist. (6 P.)

Musterlösung – Version 2

Aufgabe 1 (20 Punkte)

- a) $K_n = K_0 \cdot (1 + p/100)^n$. Ergebnis 1: $9.000,00 \text{ €} \cdot (1 + 4/100)^6 = 11.387,87 \text{ €}$; Ergebnis 2: $7.000,00 \text{ €} \cdot (1 + 5/100)^9 = 10.859,30 \text{ €}$. (je 3 P.)
- b) $p = ((K_n/K_0)^{(1/n)} - 1) \cdot 100 = ((12000/9000)^{(1/6)} - 1) \cdot 100 = 4,91 \text{ \%}$. (5 P.)
- c) $n = \ln(K_n/K_0) / \ln(1 + p/100) = 7,33 \text{ Jahre}$. Bei vollen Zinsjahren wird das Ziel erstmals nach 8 Jahren erreicht. (4 P.)
- d) $6000 \cdot (1 + 5/100)^n = 7500 \cdot (1 + 5/100)^8$; $n = 8 + \ln(7500/6000) / \ln(1 + 5/100) = 12,57 \text{ Jahre}$. (5 P.)

Aufgabe 2 (12 Punkte)

- a) $K_0 = K_n / (1 + p/100)^n = 18000 / (1 + 4/100)^{10} = 12.160,16 \text{ €}$. (7 P.)
- b) $12.160,16 \text{ €} / 18.000,00 \text{ €} \cdot 100 = 67,56 \text{ \%}$. Kundensatz: Sie müssen heute rund 67,56 % der gewünschten späteren Summe einmalig einzahlen. (5 P.)

Aufgabe 3 (18 Punkte)

- a) $K = 7500 \cdot (1 + 3/100)^4 \cdot (1 + 7/100)^4 = 11.064,84 \text{ €}$. Bei konstant 5,00 %: 11.080,92 €. Die Werte sind nicht gleich; der tatsächlich äquivalente konstante Zinssatz ist 4,98 %. (9 P.)
- b) Variante 1: $n = \ln(15000/11064,84) / \ln(1 + 7/100) = 4,50 \text{ Jahre}$ (bei vollen Jahren: 5). Variante 2: $p = ((15000/11064,84)^{(1/5)} - 1) \cdot 100 = 6,27 \text{ \%}$. (9 P.)

Aufgabe 4 (16 Punkte)

- a) Verdopplung: $n = \ln(2)/\ln(1 + 5/100) = 14,21 \text{ Jahre}$. Wachstum um 60 %: $n = \ln(1,60)/\ln(1 + 10/100) = 4,93 \text{ Jahre}$. (je 4 P.)
- b) Verdopplung: $p = (2^{(1/10)} - 1) \cdot 100 = 7,18 \text{ \%}$. Verdreifachung: $p = (3^{(1/20)} - 1) \cdot 100 = 5,65 \text{ \%}$. (je 4 P.)

Aufgabe 5 (24 Punkte)

Anbieter A: $K_0 = 1800 \cdot (1+3/100)^2 + 1800 \cdot 1 + 1800 \cdot 1/(1+5/100)^1 + 1800 \cdot 1/(1+5/100)^2 + 1800 \cdot 1/(1+5/100)^3 = 8.611,47 \text{ €}$. (4 P.)

Anbieter B: $K_0 = 2200 \cdot (1+3/100)^3 + 2200 \cdot (1+3/100)^1 + 2200 \cdot 1/(1+5/100)^1 + 2200 \cdot 1/(1+5/100)^3 = 8.665,68 \text{ €}$. (4 P.)

Anbieter C: $K_0 = 3000 \cdot (1+3/100)^4 + 3000 \cdot 1 + 3000 \cdot 1/(1+5/100)^2 = 9.097,61 \text{ €}$. (4 P.)

b) Für alle Anbieter gilt $K_3 = K_0 \cdot (1 + \text{Zinssatz ab 2027})^3$:

Anbieter A: $K_3 = 8.611,47 \text{ €} \cdot (1 + 5/100)^3 = 9.968,85 \text{ €}$. (2 P.)

Anbieter B: $K_3 = 8.665,68 \text{ €} \cdot (1 + 5/100)^3 = 10.031,61 \text{ €}$. (2 P.)

Anbieter C: $K_3 = 9.097,61 \text{ €} \cdot (1 + 5/100)^3 = 10.531,63 \text{ €}$. (2 P.)

c) Anbieter A ist finanziell am günstigsten, da sein auf Ende 2026 abgezinstes bzw. auf Ende 2029 aufgezinster Gesamtwert am niedrigsten ist. (6 P.)