



Informationsblatt: Mehrstufige Zufallsexperimente

Grundbegriffe und Rechenregeln

1. Was ist ein mehrstufiges Zufallsexperiment?

Ein mehrstufiges Zufallsexperiment besteht aus mehreren aufeinanderfolgenden Zufallsversuchen.

Beispiele: eine Münze zweimal werfen, zweimal würfeln, aus einer Urne mehrmals Kugeln ziehen, erst eine Karte ziehen und dann noch eine.

2. Ergebnis eines mehrstufigen Zufallsexperiments

Das Ergebnis besteht aus den Ergebnissen aller Stufen.

Beispiel: Münze zweimal werfen

$$\Omega = \{KK, KZ, ZK, ZZ\}$$

K = Kopf, Z = Zahl

3. Ergebnismenge

Die Ergebnismenge enthält alle möglichen Ergebnisfolgen.

Beispiel: Einmal würfeln und einmal Münze werfen

$$\Omega = \{(1,K), (1,Z), (2,K), (2,Z), \dots, (6,K), (6,Z)\}$$

Anzahl der Ergebnisse: $6 \cdot 2 = 12$

4. Baumdiagramm

Ein Baumdiagramm ist eine übersichtliche Darstellung eines mehrstufigen Zufallsexperiments.

Jede Verzweigung zeigt die möglichen Ergebnisse einer Stufe und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.

5. Pfad

Ein Pfad ist ein vollständiger Weg durch das Baumdiagramm von Anfang bis Ende.

Beispiele: Kopf $\rightarrow$ Kopf, Kopf $\rightarrow$ Zahl, Zahl $\rightarrow$ Kopf, Zahl $\rightarrow$ Zahl

6. Pfadregel (Multiplikationsregel)

Die Wahrscheinlichkeit eines vollständigen Pfades berechnet man, indem man die Wahrscheinlichkeiten entlang des Pfades multipliziert.

Formel:

$$P(\text{Pfad}) = P(1. \text{ Stufe}) \cdot P(2. \text{ Stufe}) \cdot \dots$$

Beispiel: Zweimal Kopf bei zwei Münzwürfen

$$P(KK) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$$



7. Summenregel (Additionsregel)

Besteht ein Ereignis aus mehreren Pfaden, dann addiert man die Wahrscheinlichkeiten dieser Pfade.

Formel:

$$P(A) = P(\text{Pfad 1}) + P(\text{Pfad 2}) + \dots$$

Beispiel: Genau einmal Kopf bei zwei Münzwürfen

$$P(A) = 1/4 + 1/4 = 1/2$$

8. Ziehen mit Zurücklegen

Beim Ziehen mit Zurücklegen wird das gezogene Objekt nach jeder Ziehung wieder zurückgelegt. Die Zusammensetzung bleibt gleich, die Wahrscheinlichkeiten bleiben in jeder Stufe gleich.

Beispiel: In einer Urne liegen 3 rote und 2 blaue Kugeln.

Dann gilt bei jeder Ziehung: $P(\text{Rot}) = 3/5$, $P(\text{Blau}) = 2/5$

9. Ziehen ohne Zurücklegen

Beim Ziehen ohne Zurücklegen wird das gezogene Objekt nicht zurückgelegt.

Die Zusammensetzung ändert sich, deshalb ändern sich die Wahrscheinlichkeiten ab der nächsten Ziehung.

Beispiel: 3 rote und 2 blaue Kugeln, zweimal ziehen ohne Zurücklegen

$$P(RB) = 3/5 \cdot 2/4 = 3/10$$

10. Unabhängige Ereignisse

Zwei Ereignisse sind unabhängig, wenn das eine keinen Einfluss auf das andere hat.

Typisches Beispiel: Ziehen mit Zurücklegen oder mehrere Münzwürfe.

11. Abhängige Ereignisse

Zwei Ereignisse sind abhängig, wenn das erste Ereignis das zweite beeinflusst.

Typisches Beispiel: Ziehen ohne Zurücklegen.

12. Laplace-Experiment bei mehrstufigen Versuchen

Ein mehrstufiges Experiment ist ein Laplace-Experiment, wenn alle Ergebnisfolgen gleich wahrscheinlich sind.

Beispiel: Zweimal würfeln

Alle 36 möglichen Paare sind gleich wahrscheinlich, denn $6 \cdot 6 = 36$.

13. Ereignisse bei mehrstufigen Zufallsexperimenten

Ein Ereignis besteht aus einer oder mehreren Ergebnisfolgen.



Beispiel: Zweimal würfeln

Ereignis A: Die Augensumme ist 7

$$A = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$$

$$P(A) = 6/36 = 1/6$$

14. Gegenereignis

Das Gegenereignis beschreibt: Das Ereignis tritt nicht ein.

Formel:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Beispiel: A = mindestens einmal Kopf bei zwei Münzwürfen

Gegenereignis: kein Kopf = ZZ

$$P(ZZ) = 1/4$$

$$\text{Also: } P(A) = 1 - 1/4 = 3/4$$

15. Wichtige Begriffe im Überblick

- mehrstufiges Zufallsexperiment: mehrere aufeinanderfolgende Versuche
- Ergebnis: vollständige Ergebnisfolge
- Ergebnismenge Ω : alle möglichen Ergebnisfolgen
- Ereignis: Teilmenge der Ergebnismenge
- Baumdiagramm: Darstellung aller Möglichkeiten
- Pfad: ein vollständiger Weg im Baumdiagramm
- Pfadregel: entlang eines Pfades multiplizieren
- Summenregel: verschiedene passende Pfade addieren
- mit Zurücklegen: Wahrscheinlichkeiten bleiben gleich
- ohne Zurücklegen: Wahrscheinlichkeiten ändern sich
- unabhängig: kein Einfluss
- abhängig: Einfluss vorhanden
- Gegenereignis: Ereignis tritt nicht ein

16. Rechenregeln

Pfadregel:

$$P(\text{Pfad}) = \text{Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten}$$

Summenregel:

$$P(A) = \text{Summe der Wahrscheinlichkeiten aller passenden Pfade}$$

Gegenereignis:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

17. Beispiel 1: Zweimal Münze werfen



Gesucht: Wahrscheinlichkeit für genau einmal Kopf

$$\Omega = \{KK, KZ, ZK, ZZ\}$$

Günstige Ergebnisse: $\{KZ, ZK\}$

$$P(A) = 1/4 + 1/4 = 1/2$$

18. Beispiel 2: Urne ohne Zurücklegen

In einer Urne liegen 4 rote und 3 blaue Kugeln. Es werden zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.

Gesucht: Wahrscheinlichkeit für zuerst rot, dann blau

$$P(RB) = 4/7 \cdot 3/6 = 2/7$$

19. Beispiel 3: Mindestens einmal Erfolg

Eine Münze wird dreimal geworfen. Gesucht: Wahrscheinlichkeit für mindestens einmal Kopf.

Gegenereignis: kein Kopf = ZZZ

$$P(ZZZ) = 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/8$$

$$\text{Also: } P(A) = 1 - 1/8 = 7/8$$

20. Merksätze

Bei mehrstufigen Zufallsexperimenten betrachtet man mehrere Schritte hintereinander.

Im Baumdiagramm steht jeder Weg für ein Ergebnis.

Entlang eines Pfades multipliziert man.

Mehrere günstige Pfade addiert man.

Bei Zurücklegen bleiben Wahrscheinlichkeiten gleich.

Bei Ziehen ohne Zurücklegen ändern sich Wahrscheinlichkeiten.

Das Gegenereignis ist oft der einfachste Rechenweg.

21. Mini-Übungen

1. Eine Münze wird zweimal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für zweimal Kopf?
2. Eine Urne enthält 5 rote und 3 blaue Kugeln. Es wird zweimal mit Zurücklegen gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für zweimal rot?
3. Warum sind Ziehungen ohne Zurücklegen meistens abhängig?

Lösungen:

$$1. P(KK) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$$

$$2. P(RR) = 5/8 \cdot 5/8 = 25/64$$

3. Weil sich nach der ersten Ziehung die Zusammensetzung ändert und dadurch auch die Wahrscheinlichkeiten.



Aufgabenblatt: Mehrstufige Zufallsexperimente

Aufgabe 1: Münzwürfe

Eine faire Münze wird zweimal geworfen.

1. Gib die Ergebnismenge an.
2. Zeichne ein Baumdiagramm.
3. Berechne die Wahrscheinlichkeit für die Ereignisse:
 - A: zweimal Kopf
 - B: genau einmal Kopf
 - C: mindestens einmal Kopf

Aufgabe 2: Würfeln

Ein fairer Würfel wird zweimal geworfen.

1. Wie viele Ergebnisse gibt es insgesamt?
2. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass:
 - A: beide Würfe dieselbe Zahl zeigen
 - B: die Summe 8 ist
 - C: mindestens einmal eine 6 fällt

Aufgabe 3: Urne mit Zurücklegen

In einer Urne liegen 4 rote, 3 blaue und 3 grüne Kugeln.
Es werden zweimal mit Zurücklegen Kugeln gezogen.

1. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass:
 - A: zweimal rot gezogen wird
 - B: zuerst blau, dann grün gezogen wird
 - C: keine rote Kugel gezogen wird
2. Erkläre, warum es sich hier um unabhängige Ereignisse handelt.

Aufgabe 4: Urne ohne Zurücklegen

In einer Urne liegen 5 rote und 3 blaue Kugeln.
Es werden zweimal ohne Zurücklegen Kugeln gezogen.

1. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass:
 - A: zweimal rot gezogen wird
 - B: zuerst blau, dann rot gezogen wird
 - C: genau eine rote Kugel gezogen wird
2. Begründe, warum hier abhängige Ereignisse vorliegen.



Aufgabe 5: Qualitätskontrolle in einem Unternehmen

Ein Unternehmen für Handyhüllen stellt fest:

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Hülle einen Lackfehler hat, beträgt 0,08.

Zwei Hüllen werden nacheinander zufällig geprüft. Es soll angenommen werden, dass die Prüfungen unabhängig sind.

1. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass:

- A: beide Hüllen fehlerfrei sind
- B: genau eine Hülle fehlerhaft ist
- C: mindestens eine Hülle fehlerhaft ist

2. Stelle die Situation in einem Baumdiagramm dar.

Aufgabe 6: Kundenbestellungen im Online-Shop

In einem Online-Shop wird beobachtet:

Mit Wahrscheinlichkeit 0,65 bestellt ein Kunde ohne Rückfrage,

mit Wahrscheinlichkeit 0,35 stellt er vor dem Kauf noch eine Frage an den Support.

Zwei Kunden werden nacheinander betrachtet.

1. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass:

- A: beide Kunden ohne Rückfrage bestellen
- B: genau ein Kunde eine Rückfrage stellt
- C: mindestens ein Kunde eine Rückfrage stellt

2. Formuliere das Gegenereignis zu C und nutze es zur Berechnung.

Aufgabe 7: Zahlungseingänge

Ein Unternehmen weiß aus Erfahrung:

Mit Wahrscheinlichkeit 0,9 zahlt ein Kunde eine Rechnung pünktlich,

mit Wahrscheinlichkeit 0,1 zahlt er nicht pünktlich.

Drei Kunden werden unabhängig voneinander betrachtet.

1. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass:

- A: alle drei Kunden pünktlich zahlen
- B: genau zwei Kunden pünktlich zahlen
- C: mindestens ein Kunde nicht pünktlich zahlt

2. Welche Berechnung ist bei C besonders geschickt?



Aufgabe 8: Retouren im Versandhandel

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein versandeter Artikel retourniert wird, beträgt 0,12.
Drei Bestellungen werden nacheinander betrachtet.

1. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass:
 - A: keine Bestellung retourniert wird
 - B: genau eine Bestellung retourniert wird
 - C: mindestens eine Bestellung retourniert wird
2. Erkläre, warum das Gegenereignis bei C sinnvoll ist.

Aufgabe 9: EC-Kartenzahlung im Geschäft

In einem Geschäft zahlen Kunden mit Wahrscheinlichkeit 0,55 mit Karte und mit Wahrscheinlichkeit 0,45 bar.
Zwei Kunden werden nacheinander betrachtet.

1. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass:
 - A: beide Kunden mit Karte zahlen
 - B: ein Kunde bar und ein Kunde mit Karte zahlt
 - C: mindestens ein Kunde bar zahlt
2. Stelle ein Baumdiagramm auf.

Aufgabe 10: Produktionskontrolle ohne Zurücklegen

In einer Kiste liegen 10 Bauteile, davon sind 2 defekt und 8 einwandfrei.
Zwei Bauteile werden ohne Zurücklegen entnommen.

1. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass:
 - A: beide Bauteile einwandfrei sind
 - B: zuerst defekt, dann einwandfrei
 - C: genau ein Bauteil defekt ist
2. Erkläre den Unterschied zu einer Entnahme mit Zurücklegen.

Aufgabe 11: Werbe-E-Mails

Ein Unternehmen verschickt Newsletter.
Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Empfänger auf den Link klickt, beträgt 0,18.
Zwei Empfänger werden unabhängig voneinander betrachtet.

1. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass:
 - A: beide klicken
 - B: genau einer klickt
 - C: keiner klickt



2. Was ist das Gegenereignis zu C?

Aufgabe 12: Lager und Kommissionierung

In einem Lager sind 6 richtige und 2 falsch etikettierte Pakete.
Es werden zwei Pakete ohne Zurücklegen kontrolliert.

1. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass:
 - A: beide Pakete richtig etikettiert sind
 - B: genau ein Paket falsch etikettiert ist
 - C: mindestens ein Paket falsch etikettiert ist
2. Berechne C einmal direkt und einmal über das Gegenereignis.

Zusatzaufgabe 13: Schwieriger

Eine faire Münze wird dreimal geworfen.

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für:
 - genau zweimal Kopf
 - mindestens zweimal Kopf
 - höchstens einmal Kopf
2. Gib jeweils die günstigen Ergebnisse an.

Zusatzaufgabe 14: Wirtschaftlicher Kontext

Ein Start-up verkauft ein neues Produkt.
Mit Wahrscheinlichkeit 0,7 entscheidet sich ein Interessent für einen Kaufabschluss.
Drei Beratungsgespräche werden nacheinander betrachtet.

1. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass:
 - A: alle drei Interessenten kaufen
 - B: genau zwei Interessenten kaufen
 - C: mindestens ein Interessent nicht kauft
2. Interpretiere das Ergebnis von C in einem Satz.

Kleine Hilfen für die Schüler

- Pfadregel: entlang eines Pfades multiplizieren
- Summenregel: mehrere günstige Pfade addieren
- Gegenereignis: $P(\text{nicht A}) = 1 - P(A)$
- mit Zurücklegen: Wahrscheinlichkeiten bleiben gleich
- ohne Zurücklegen: Wahrscheinlichkeiten ändern sich