

## 4.2. Musteraufgaben zu quadratischen Funktionen

### Aufgabe 1: Bestimmung von Scheitelpunkt und Achsenschnittpunkte

Bestimme den Scheitelpunkt und die Achsenschnittpunkte der Parabel p:

a)  $p(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 5x - 11.$

b)  $p(x) = -\frac{1}{6}x^2 - x + 2$

c)  $p(x) = \frac{1}{4}x^2 + 4x$

d)  $p(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{7}{3}.$

e)  $p(x) = \frac{1}{5}x^2 - \frac{6}{5}x - \frac{6}{5}.$

### Aufgabe 2: Bestimmung von Funktionsgleichungen

Bestimme die Gleichung der Parabel p durch die Punkte A, B und C:

a) A(-5 | 4), B(-2 | 1) und C(1 | 4)

b) A(-8 | -16), B(-6 | -15) und C(-4 | -12)

c) A(-2 | 2), B(3 | -3) und C(4 | -2,8)

d) A(-9 | -2,5), B(-6 | 2) und C(3 | -2,5)

e) A(3 | 1), B(4 | 1,75) und C(5 | 2)

## 4.1. Lösungen zu den Musteraufgaben zu quadratischen Funktionen

### Aufgabe 1: Bestimmung von Scheitelpunkt und Achsenschnittpunkte

#### Teil a)

Scheitelpunkt: quadratische Ergänzung:

$$\begin{aligned}y &= -\frac{1}{2}x^2 + 5x - 11 && \left| -\frac{1}{2} \text{ ausklammern} \right. \\ &= -\frac{1}{2}[x^2 - 10x + 22] && \left| \text{quadratische Ergänzung mit } 5^2 \right. \\ &= -\frac{1}{2}[x^2 - 10x + 25 - 25 + 22] && \left| 2. \text{ binomische Formel} \right. \\ &= -\frac{1}{2}[(x - 5)^2 - 3] && \left| -\frac{1}{2} \text{ wieder einklammern} \right. \\ &= -\frac{1}{2}(x - 5)^2 - \frac{3}{2} \\ \Rightarrow \text{Scheitelpunkt } S(5 \mid -\frac{3}{2})\end{aligned}$$

Schnittpunkt mit der y-Achse:  $x = 0$  einsetzen:

$$y = -0,5 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0 - 11 = -11 \Rightarrow S_y(0 \mid -11)$$

Schnittpunkt mit der x-Achse:  $y = 0$  setzen und Gleichung mit p-q-Formel lösen:

$$y = -0,5x^2 + 5x - 11 = -0,5[x^2 - 10x + 22] \Rightarrow x_{1/2} = 5 \pm \sqrt{3} \Rightarrow S_{x_{1/2}}(5 \pm \sqrt{3} \mid 0)$$

#### Teil b)

Scheitelpunkt: quadratische Ergänzung:

$$\begin{aligned}y &= -\frac{1}{6}x^2 - x + 2 && \left| (-\frac{1}{6}) \text{ ausklammern} \right. \\ &= -\frac{1}{6}[x^2 + 6x - 12] && \left| \text{quadratische Ergänzung mit } 3^2 \right. \\ &= -\frac{1}{6}[x^2 + 6x + 9 - 9 - 12] && \left| 1. \text{ binomische Formel} \right. \\ &= -\frac{1}{6}[(x + 3)^2 - 21] && \left| (-\frac{1}{6}) \text{ wieder einklammern} \right. \\ &= -\frac{1}{6}(x + 3)^2 + 3,5\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Scheitelpunkt } S(-3 \mid 3,5)$$

Schnittpunkt mit der y-Achse:  $x = 0$  einsetzen:

$$y = -\frac{1}{6} \cdot 0^2 - 0 + 2 = 2 \Rightarrow S_y(0 \mid 2)$$

Schnittpunkt mit der x-Achse:  $y = 0$  setzen und Gleichung mit p-q-Formel lösen:

$$y = -\frac{1}{6}x^2 - x + 2 = -\frac{1}{6}[x^2 + 6x - 12] \Rightarrow x_{1/2} = -3 \pm \sqrt{21} \Rightarrow S_{x_{1/2}}(-3 \pm \sqrt{21} \mid 0)$$

#### Teil c)

Scheitelpunkt: quadratische Ergänzung:

$$\begin{aligned}y &= \frac{1}{4}x^2 + 4x && \left| \frac{1}{4} \text{ ausklammern} \right. \\ &= \frac{1}{4}[x^2 + 16x] && \left| \text{quadratische Ergänzung mit } 8^2 \right. \\ &= \frac{1}{4}[x^2 + 16x + 64 - 64] && \left| 1. \text{ binomische Formel} \right. \\ &= \frac{1}{4}[(x + 8)^2 - 64] && \left| \frac{1}{4} \text{ wieder einklammern} \right.\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4} (x + 8)^2 - 16$$

⇒ Scheitelpunkt S(-8 | -16)

Schnittpunkt mit der y-Achse: x = 0 einsetzen:

$$y = \frac{1}{4} \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 = 0 \Rightarrow S_y(0 | 0)$$

Schnittpunkt mit der x-Achse: y = 0 setzen und Gleichung mit p-q-Formel lösen:

$$y = \frac{1}{4} x^2 + 4x = \frac{1}{4} [x^2 + 16x + 0] \Rightarrow x_{1/2} = -8 \pm 8 \Rightarrow S_{x_{1/2}}(-8 \pm 8 | 0)$$

#### Teil d)

Scheitelpunkt: quadratische Ergänzung:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{3} x^2 + \frac{4}{3} x + \frac{7}{3} && \left| \frac{1}{3} \text{ ausklammern} \right. \\ &= \frac{1}{3} [x^2 + 4x + 7] && \left| \text{quadratische Ergänzung mit } 2^2 \right. \\ &= \frac{1}{3} [x^2 + 4x + 4 - 4 + 7] && \left| \text{1. binomische Formel} \right. \\ &= \frac{1}{3} [(x + 2)^2 + 3] && \left| \frac{1}{3} \text{ wieder einklammern} \right. \\ &= \frac{1}{3} (x + 2)^2 + 1 \end{aligned}$$

⇒ Scheitelpunkt S(-2 | 1)

Schnittpunkt mit der y-Achse: x = 0 einsetzen:

$$y = \frac{1}{3} \cdot 0^2 + \frac{4}{3} \cdot 0 + \frac{7}{3} = \frac{7}{3} \Rightarrow S_y(0 | \frac{7}{3})$$

Schnittpunkt mit der x-Achse: y = 0 setzen und Gleichung mit p-q-Formel lösen:

$$y = \frac{1}{3} x^2 + \frac{4}{3} x + \frac{7}{3} = \frac{1}{3} [x^2 + 4x + 7] \Rightarrow x_{1/2} = -2 \pm \sqrt{-3} \Rightarrow \text{keine Nullstellen, da negativer Radikand !}$$

#### Teil e)

Scheitelpunkt: quadratische Ergänzung:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{5} x^2 - \frac{6}{5} x - \frac{6}{5} && \left| \frac{1}{5} \text{ ausklammern} \right. \\ &= \frac{1}{5} [x^2 - 6x - 6] && \left| \text{quadratische Ergänzung mit } 3^2 \right. \\ &= \frac{1}{5} [x^2 - 6x + 9 - 9 - 6] && \left| \text{2. binomische Formel} \right. \\ &= \frac{1}{5} [(x - 3)^2 - 15] && \left| \frac{1}{5} \text{ wieder einklammern} \right. \\ &= \frac{1}{5} (x - 3)^2 - 3 \end{aligned}$$

⇒ Scheitelpunkt S(3 | -3)

Schnittpunkt mit der y-Achse: x = 0 einsetzen:

$$y = \frac{1}{5} \cdot 0^2 - \frac{6}{5} \cdot 0 - \frac{6}{5} = -\frac{6}{5} \Rightarrow S_y(0 | -\frac{6}{5})$$

Schnittpunkt mit der x-Achse: y = 0 setzen und Gleichung mit p-q-Formel lösen:

$$y = \frac{1}{5} x^2 - \frac{6}{5} x - \frac{6}{5} = \frac{1}{5} [x^2 - 6x - 6] \Rightarrow x_{1/2} = 3 \pm \sqrt{15} \Rightarrow S_{x_{1/2}}(3 \pm \sqrt{15} | 0)$$

## Aufgabe 2: Bestimmung von Funktionsgleichungen

### Teil a)

Punkte A, B und C in die Gleichung  $y = ax^2 + bx + c$  einsetzen und LGS lösen:

$$\begin{array}{l|l} A(-5 | 4): & 4 = a \cdot (-5)^2 + b \cdot (-5) + c \\ B(-2 | 1): & 1 = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c \\ C(1 | 4): & 4 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \end{array}$$

Seiten vertauschen:

$$\begin{array}{r} 25a - 5b + 1c = 4 \\ 4a - 2b + 1c = 1 \\ 1a + 1b + 1c = 4 \end{array}$$

als Matrix schreiben:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 25 & -5 & 1 & 4 \\ 4 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

in GTR eingeben, Matrix/B:rref, Brüche anzeigen mit MATH/1:frac

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 4/3 \\ 0 & 0 & 1 & 7/3 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \text{Funktionsgleichung } y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{7}{3}.$$

### Teil b)

Punkte A, B und C in die Gleichung  $y = ax^2 + bx + c$  einsetzen und LGS lösen:

$$\begin{array}{l|l} A(-8 | -16): & -16 = a \cdot (-8)^2 + b \cdot (-8) + c \\ B(-6 | -15): & -15 = a \cdot (-6)^2 + b \cdot (-6) + c \\ C(-4 | -12): & -12 = a \cdot (-4)^2 + b \cdot (-4) + c \end{array}$$

Seiten vertauschen:

$$\begin{array}{r} 64a - 8b + 1c = -16 \\ 36a - 6b + 1c = -15 \\ 16a - 4b + 1c = -12 \end{array}$$

als Matrix schreiben:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 64 & -8 & 1 & -16 \\ 36 & -6 & 1 & -15 \\ 16 & -4 & 1 & -12 \end{array} \right)$$

in GTR eingeben, Matrix/B:rref, Brüche anzeigen mit MATH/1:frac

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \text{Funktionsgleichung } y = \frac{1}{4}x^2 + 4x.$$

### Teil c)

Punkte A, B und C in die Gleichung  $y = ax^2 + bx + c$  einsetzen und LGS lösen:

$$\begin{array}{l|l} A(-2 | 2): & 2 = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c \\ B(3 | -3): & -3 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c \\ C(4 | -2,8): & -2,8 = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c \end{array}$$

Seiten vertauschen:

$$\begin{aligned}4a - 2b + 1c &= 2 \\9a + 3b + 1c &= -3 \\16a + 4b + 1c &= -2,8\end{aligned}$$

als Matrix schreiben:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 2 \\ 9 & 3 & 1 & -3 \\ 16 & 4 & 1 & -2,8 \end{array} \right)$$

in GTR eingeben, Matrix/B:rref, Brüche anzeigen mit MATH/1:frac

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0,2 \\ 0 & 1 & 0 & -1,2 \\ 0 & 0 & 1 & -1,2 \end{array} \right)$$

⇒ Funktionsgleichung  $y = 0,2x^2 - 1,2x - 1,2$ .

#### Teil d)

Punkte A, B und C in die Gleichung  $y = ax^2 + bx + c$  einsetzen und LGS lösen:

$$\begin{array}{l} A(-9 \mid -2,5): \\ B(-6 \mid 2): \\ C(3 \mid -2,5): \end{array} \left| \begin{array}{l} -2,5 = a \cdot (-9)^2 + b \cdot (-9) + c \\ 2 = a \cdot (-6)^2 + b \cdot (-6) + c \\ -2,5 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c \end{array} \right|$$

Seiten vertauschen:

$$\begin{aligned}81a - 9b + 1c &= -2,5 \\36a - 6b + 1c &= 2 \\9a + 3b + 1c &= -2,5\end{aligned}$$

als Matrix schreiben:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 81 & -9 & 1 & -2,5 \\ 36 & -6 & 1 & 2 \\ 9 & 3 & 1 & -2,5 \end{array} \right)$$

in GTR eingeben, Matrix/B:rref, Brüche anzeigen mit MATH/1:frac

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

⇒ Funktionsgleichung  $y = -\frac{1}{6}x^2 - x + 2$ .

#### Teil e)

Punkte A, B und C in die Gleichung  $y = ax^2 + bx + c$  einsetzen und LGS lösen:

$$\begin{array}{l} A(3 \mid 1): \\ B(4 \mid 1,75): \\ C(5 \mid 2): \end{array} \left| \begin{array}{l} 1 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c \\ 1,75 = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c \\ 2 = a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c \end{array} \right|$$

Seiten vertauschen:

$$\begin{aligned}9a + 3b + 1c &= 1 \\16a + 4b + 1c &= 1,75 \\25a + 5b + 1c &= 2\end{aligned}$$

als Matrix schreiben:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 1 & 1 \\ 16 & 4 & 1 & 1,75 \\ 25 & 5 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

in GTR eingeben, Matrix/B:rref

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -0,25 \\ 0 & 1 & 0 & 2,5 \\ 0 & 0 & 1 & -4,25 \end{array} \right)$$

⇒ Funktionsgleichung  $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{17}{4}$