

Musterlösung (Schülerversion)
Situation Eva und Rita – Gewinnfunktionen

Aufgabe 1 – Ritas Mützen

Gegeben:

- Gewinnschwelle bei $x = 4$ ME: $G(4) = 0$ (ab hier entsteht Gewinn)
- Gewinn bei 8 ME: $G(8) = 44$ GE
- Maximaler Gewinn von 49,5 GE bei $x = 7$ ME (Scheitelpunkt)

Wir suchen die quadratische Gewinnfunktion $G(x)$.

1. Schritt: Scheitelpunktform aufstellen

Der Scheitelpunkt liegt bei $x = 7$ und $G_{\max} = 49,5$.

Allgemeine Scheitelpunktform:

$$G(x) = a(x - x_S)^2 + G_{\max}$$

Hier:

$$G(x) = a(x - 7)^2 + 49,5$$

2. Schritt: a mit Hilfe von $G(4) = 0$ berechnen

Setze $x = 4$ ein:

$$0 = a(4 - 7)^2 + 49,5$$

$$0 = 9a + 49,5$$

$$9a = -49,5 \rightarrow a = -49,5 / 9 = -5,5$$

Damit lautet die Gewinnfunktion in Scheitelpunktform:

$$G(x) = -5,5(x - 7)^2 + 49,5$$

3. Schritt: In die Normalform umwandeln

$$G(x) = -5,5(x^2 - 14x + 49) + 49,5$$

$$G(x) = -5,5x^2 + 77x - 269,5 + 49,5$$

$$G(x) = -5,5x^2 + 77x - 220$$

Endergebnis für Ritas Mützen:

$$G(x) = -5,5(x - 7)^2 + 49,5 \quad (\text{Scheitelpunktform})$$

$$G(x) = -5,5x^2 + 77x - 220 \quad (\text{Normalform})$$

Aufgabe 2 – Evas Schals

Gegeben:

$$\text{Kostenfunktion: } K(x) = 5x + 10$$

$$\text{Preis-Absatz-Funktion: } p(x) = -2,5x + 55$$

a) Erlös- und Gewinnfunktion

$$\text{Erlösfunktion: } E(x) = p(x) \cdot x$$

$$E(x) = (-2,5x + 55) \cdot x = -2,5x^2 + 55x$$

$$\text{Gewinnfunktion: } G(x) = E(x) - K(x)$$

$$G(x) = (-2,5x^2 + 55x) - (5x + 10)$$

$$G(x) = -2,5x^2 + 55x - 5x - 10$$

$$G(x) = -2,5x^2 + 50x - 10$$

b) Sättigungsmenge und Höchstpreis

Sättigungsmenge: $p(x) = 0$

$$-2,5x + 55 = 0 \rightarrow x = 22$$

Sättigungsmenge: 22 ME

Höchstpreis: Preis bei $x = 0$

$$p(0) = 55$$

Höchstpreis: 55 GE

c) In welchem Mengenbereich erzielt Eva Gewinn?

$$\text{Gewinn} > 0 \rightarrow G(x) = -2,5x^2 + 50x - 10 > 0$$

Nullstellen (ungefähr): $x_1 \approx 0,2$ und $x_2 \approx 19,8$

Zwischen den Nullstellen ist der Gewinn positiv.

Praktisch (ganze Mengen): Gewinn bei 1 bis 19 ME.

d) Maximaler Gewinn und zugehörige Menge

Scheitelpunkt der Gewinnfunktion $G(x) = -2,5x^2 + 50x - 10$

$$x_G = -b / (2a) = -50 / (2 \cdot -2,5) = 10$$

Maximaler Gewinn:

$$G(10) = -2,5 \cdot 10^2 + 50 \cdot 10 - 10$$

$$G(10) = -250 + 500 - 10 = 240 \text{ GE}$$

Maximaler Gewinn: 240 GE bei 10 ME.

e) Höchster Erlös und zugehörige Menge

$$E(x) = -2,5x^2 + 55x$$

Scheitelpunkt:

$$x_E = -b / (2a) = -55 / (2 \cdot -2,5) = 11$$

$$E(11) = -2,5 \cdot 11^2 + 55 \cdot 11$$

$$E(11) = -302,5 + 605 = 302,5 \text{ GE}$$

Maximaler Erlös: 302,5 GE bei 11 ME.

f) Kosten, Erlös und Gewinn bei 8 ME

Kosten:

$$K(8) = 5 \cdot 8 + 10 = 50 \text{ GE}$$

Erlös:

$$E(8) = -2,5 \cdot 8^2 + 55 \cdot 8$$

$$E(8) = -160 + 440 = 280 \text{ GE}$$

Gewinn:

$$G(8) = E(8) - K(8) = 280 - 50 = 230 \text{ GE}$$

Ergebnis:

$$K(8) = 50 \text{ GE}, E(8) = 280 \text{ GE}, G(8) = 230 \text{ GE}.$$

g) Welchen Preis sollte Eva verlangen?

Zur Gewinnmaximierung nimmt man die Menge mit maximalem Gewinn: $x = 10$ ME.

Preis bei $x = 10$:

$$p(10) = -2,5 \cdot 10 + 55 = -25 + 55 = 30 \text{ GE}$$

Empfehlung: Preis von 30 GE pro Schal.

h) Skizze der Funktionen (Hinweise)

- $K(x) = 5x + 10$: Gerade, beginnt bei 10 (Fixkosten), steigt mit Steigung 5.

- $E(x) = -2,5x^2 + 55x$: nach unten geöffnete Parabel, Nullstellen bei 0 und 22, Maximum bei $x = 11$.

- $G(x) = -2,5x^2 + 50x - 10$: nach unten geöffnete Parabel, Nullstellen ca. bei 0,2 und 19,8, Maximum bei $x = 10$.

Tipp: Zeichne alle drei Funktionen in ein Koordinatensystem, x von 0 bis ca. 22, y bis etwa 320 GE.