Lehrbuch Seite 156

6 a) $f(x) = -\frac{1}{200}(x - 100)^2 + 30$

$\Rightarrow S(100/30) \Rightarrow$ Höhe: 30

b) $\left.\begin{array}{l} x_{01} = 177{,}46 \\ x_{02} = 22{,}54 \end{array}\right\} \Rightarrow |\overline{AB}| = 154{,}92$

c) $y = \frac{1}{2}x - 20$

7 a) $f(x) = -(x - 1)(x - 4)$

b) $f(x) = -x^2 + 5x - 4$

c) $f(x) = -(x - 2{,}5)^2 + 2{,}25$

Polynomdarstellung	Linearfaktordarstellung	Scheitelpunktform
$f(x) = -2x^2 - 3x + 2$	$\boldsymbol{f(x) = -2(x+2)\left(x - \frac{1}{2}\right)}$	$\boldsymbol{f(x) = -2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{25}{8}}$ $\boldsymbol{= -2(x + 0{,}75)^2 + 3{,}125}$
$\boldsymbol{f(x) = 0{,}5x^2 - x - 4}$	$f(x) = 0{,}5(x+2)(x-4)$	$\boldsymbol{f(x) = 0{,}5(x-1)^2 - 4{,}5}$
$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x + 1}$	$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{4}(x+2)^2}$	$f(x) = \frac{1}{4}(x+2)^2$
$f(x) = 2x^2 - 2x$	$\boldsymbol{f(x) = 2x(x-1)}$	$\boldsymbol{f(x) = 2(x - 0{,}5)^2 - 0{,}5}$
$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2}}$	$f(x) = 0{,}5(x-1)(x+3)$	$\boldsymbol{f(x) = 0{,}5(x+1)^2 - 2}$
$\boldsymbol{f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + 4}$	$\boldsymbol{f(x) = -\frac{1}{2}(x+4)(x-2)}$	$f(x) = -\frac{1}{2}(x+1)^2 + 4{,}5$
$f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 2x - \frac{7}{3}$	$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{3}(x+7)(x-1)}$	$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{3}(x+3)^2 - \frac{16}{3}}$
$\boldsymbol{f(x) = 0{,}8x^2 + 7{,}2x + 11{,}2}$	$f(x) = 0{,}8(x+2)(x+7)$	$\boldsymbol{f(x) = 0{,}8(x + 4{,}5)^2 - 5}$
$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 4}$	$\boldsymbol{f(x) = -\frac{1}{2}(x+2)(x-4)}$	$f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{9}{2}$

Lehrbuch Seite 161

3.2.3 Aufstellen quadratischer Funktionsgleichungen

1 a) $K(x) = ax^2 + bx + c$

Bedingungen: $\Rightarrow$ **Gleichungen:**

$K(1) = 2 \Rightarrow a + b + c = 2$

$K(4) = 3 \Rightarrow 6a + 4b + c = 3$

$K(6) = 4 \Rightarrow 36a + 6b + c = 4$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 16 & 4 & 1 & 3 \\ 36 & 6 & 1 & 4 \end{array}\right) \text{ GTR: rref} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0{,}0\overline{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}1\overline{6} \\ 0 & 0 & 1 & 1{,}8 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow K(x) = 0{,}0\overline{3}x^2 + 0{,}1\overline{6}x + 1{,}8$

GTR-Kontrolle mit QuadReg: s. Schulbuch, GTR-Anhang 26

b) $K(0) = 8$

c) $K(9) = 6$

2 a) $p_A(x) = ax^2 + bx + c$

Bedingungen: $\Rightarrow$ **Gleichungen:**

$p_A(25) = 27{,}5 \Rightarrow 625a + 25b + c = 27{,}5$

$p_A(50) = 40 \Rightarrow 1\,600a + 40b + c = 40$

$p_A(75) = 47{,}5 \Rightarrow 5\,625a + 75b + c = 47{,}5$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 625 & 25 & 1 & 27{,}5 \\ 1\,600 & 40 & 1 & 40 \\ 5\,625 & 75 & 1 & 47{,}5 \end{array}\right) \text{ GTR: rref} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -0{,}004 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}8 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow p_A(x) = -0{,}004x^2 + 0{,}8x + 10$

b) $p_A(0) = 10$

c) $p_A(x) = 20$

$x \approx 13{,}4$

3 a) $E(x) = ax^2 + bx + c$

Bedingungen: $\Rightarrow$ **Gleichungen:**

$E(0) = 0 \Rightarrow c = 0$

$E(20) = 0 \Rightarrow 400a + 20b + c = 0$

$E(8) = 384 \Rightarrow 64a + 8b + c = 384$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 400 & 20 & 1 & 0 \\ 64 & 8 & 1 & 384 \end{array}\right) \quad \text{GTR: rref} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 80 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$E(x) = -4x^2 + 80x$

GTR-Kontrolle mit QuadReg: s. Schulbuch, GTR-Anhang 26

b) GTR: $\boxed{\text{2ND}}$, CALC, 4:maximum $\Rightarrow H(10/400)$

Bei einer Produktionsmenge von 10 ME sind die Erlöse mit 400 GE maximal.

c) $E(x) = 300$

$x_1 = 5 \wedge x_2 = 15$

4 a) $f(x) = -2x^2 + 3x + 4$

b) $f(x) = -0{,}5x^2 - x + 2$

c) $f(x) = -4x^2 + 6$

d) $f(x) = x^2 - 10x$

GTR-Kontrolle: Nach Eingabe der ermittelten Funktionsgleichung in den Y-Editor kann mithilfe von $\boxed{\text{2ND}}$, [TABLE] überprüft werden, ob die gegebenen Punkte auf dem Graphen liegen.

3.2.4 Kosten, Erlös und Gewinn im Monopol

1 a) $p(x) = -0{,}8x + 4$

$E(x) = -0{,}8x^2 + 4x$

$p(x) = 1$

$1 = -0{,}8x + 4$

$x = 3{,}75$ [ME]

$E(3{,}75) = 3{,}75$ [GE]

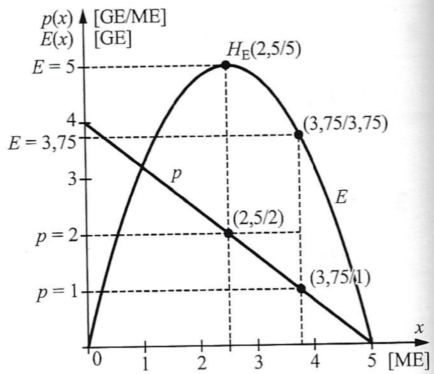
b) $H_E(2{,}5/5)$

$x_{E_{max}} = 2{,}5$ [ME]

$E_{max} = 5$ [GE]

$p_{E_{max}} = 2$ [GE/ME]

c) s. Abb.



2 a) $E(x) = K(x)$

$-x^2 + 10x = 0{,}1x^2 + 1{,}2x + 7{,}7$

$0 = x^2 - 8x + 7$

$x_1 = 1$: Gewinnschwelle x_{GS}

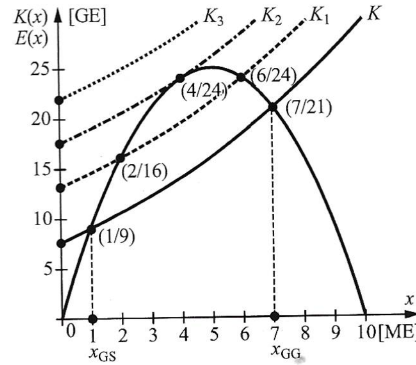
$x_2 = 7$: Gewinngrenze x_{GG}

b) $K(x) = 0{,}1x^2 + 1{,}2x + 7{,}7$

$K_1(x) = 0{,}1x^2 + 1{,}2x + 13{,}2$

$K_2(x) = 0{,}1x^2 + 1{,}2x + 17{,}6$

$K_3(x) = 0{,}1x^2 + 1{,}2x + 22$



$\underline{E(x) = K_1(x):}$

$-x^2 + 10x = 0{,}1x^2 + 1{,}2x + 13{,}2$

$0 = x^2 - 8x + 12$

$x_1 = 2$

$x_2 = 6$

$\underline{E(x) = K_2(x):}$

$-x^2 + 10x = 0{,}1x^2 + 1{,}2x + 17{,}6$

$0 = x^2 - 8x + 16$

$x_{1/2} = 4$

$\underline{E(x) = K_3(x):}$

$-x^2 + 10x = 0{,}1x^2 + 1{,}2x + 22$

$0 = x^2 - 8x + 20$

$x_{1/2} =$ n. d.

c) s. Abb.

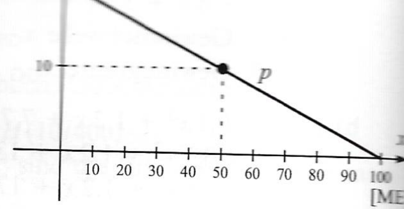
d) 2 Lösungen: Die Parabeln schneiden sich zweimal.

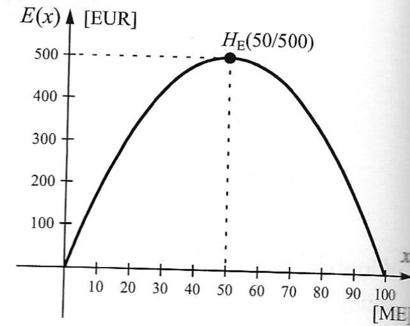
1 (doppelte) Lösung: Die Parabeln berühren sich in einem Punkt.

Keine Lösung: Die Parabeln haben keinen gemeinsamen Punkt.

e) Nur mit den Kostenfunktionen K und K_1 kann Gewinn erwirtschaftet wer-den; es existiert jeweils eine Gewinnschwelle und eine Gewinngrenze. Für K_2 ist der maximale Gewinn gleich Null; Gewinnschwelle und Gewinngren-ze fallen zusammen. Für K_3 entstehen nur Verluste, weil die Kosten imme höher als die Erlöse sind.

d) $E_{max}(50) = 500$ [EUR]
e) s. Abb.
f) $E(20) = 320$ [EUR]
$p(20) = 16$ [EUR/ME]
g) $p(50) = 10$ [EUR/ME]



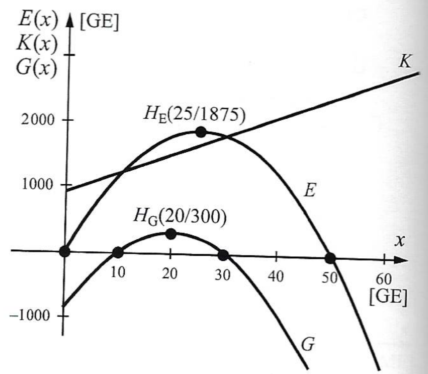


4 a) Erlösfunktion: $E(x) = p(x) \cdot x = -3x^2 + 150x$
Gewinnfunktion: $G(x) = E(x) - K(x) = -3x^2 + 120x - 900$

b) Nullstellen der Erlösfunktion:
$E(x) = 0$
$0 = -3x^2 + 150x$
$x_1 = 0;\ x_2 = 50$

c) Scheitelpunktform der Erlösfunktion:
$E(x) = -3(x - 25)^2 + 1\,875$
$\Rightarrow S(25/1\,875) = H_E$
Maximaler Erlös:
$E_{max} = E(25) = 1\,875$ [GE]
Erlösmaximale Produktionsmenge:
$x_{E_{max}} = 25$ [ME]

d) s. Abb.



$x^2 - 40x + 300 = 0$
$x_{GS} = 10$: Gewinnschwelle
$x_{GG} = 30$: Gewinngrenze

f) Scheitelpunktform der Gewinnfunktion:
$G(x) = (x - 20)^2 + 300 \Rightarrow S(20/300) = H_E$
Gewinnmaximale Ausbringungsmenge: $x_{G_{max}} = 20$ [ME]
Maximaler Gewinn: $G_{max} = G(20) = 300$ [GE]

g) s. Abb.

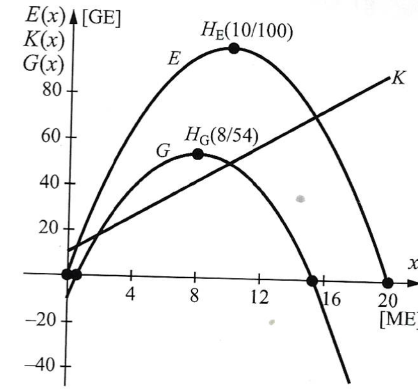
h) $C(20/90)$
D. h.: Bei der gewinnmaximalen Ausbringungsmenge $x_{G_{max}} = 20$ ME beträgt der Marktpreis $p_{G_{max}} = 90$ GE/ME.

5 a) Nullstellen der Erlösfunktion: $x_1 = 0;\ x_2 = 20$
Scheitelpunkt der Erlösfunktion: $S(10/100) = H_E$
Graph s. Abb.

b) $G(x) = -x^2 + 16x - 10$

c) Nullstellen der Gewinnfunktion:
$x_1 \approx 0{,}652;\ x_2 \approx 15{,}348$
Scheitelpunkt der Gewinnfunktion:
$S(8/54) = H_G$

d) Graph s. Abb.



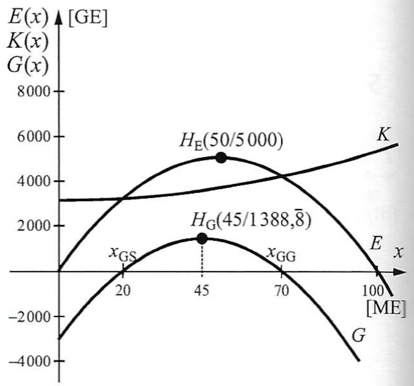
e) $x_{GS} \approx 0{,}652$: Gewinnschwelle (Break-even-Point)
$x_{GG} \approx 15{,}348$: Gewinngrenze
Über dem Intervall zwischen den beiden Stellen wird Gewinn erwirtschaftet, außerhalb dieses Intervalls werden Verluste erwirtschaftet.
Alternativer Ansatz zur Berechnung dieser Stellen:
$E(x) = K(x)$

f) Gewinnmaximale Produktionsmenge: $x = 8$ [ME]
Maximaler Gewinn: $G_{\max} = 54$ [GE]

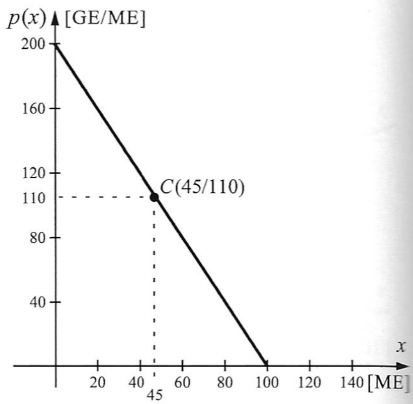
g) Preisabsatzfunktion: $p(x) = \dfrac{E(x)}{x} = -x + 20$

$C(8/12)$; Marktpreis: $p = 12$ [GE/ME]

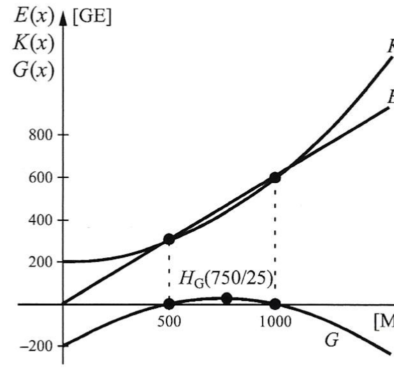
6 a) Nullstellen der Erlösfunktion: $E(x) = 0$: $x_1 = 0$; $x_2 = 100$
b) Linearfaktordarstellung: $E(x) = -2x \cdot (x - 100)$
c) Scheitelpunktform: $E(x) = -2(x - 50)^2 + 5\,000 \Rightarrow S(50/5\,000) = H_E$
Bei einer Produktion von $x_{E_{\max}} = 50$ [ME] ergibt sich der maximale Erlös mit $E_{\max} = 50\,000$ [GE]
d) Gesamtkostenfunktion:
$K(x) = K_v + K_f = 0,\overline{2} \cdot x^2 + 3\,111,\overline{1}$
e) Gewinnfunktion: $G(x) = E(x) - K(x)$
$G(x) = -2,\overline{2}x^2 - 200x - 3\,111,\overline{1}$
f) s. Abb.
g) $G(x) = 0$ $x_1 = 20$; $x_2 = 70$
Gewinnschwelle: $x_{GS} = 20$
Gewinngrenze: $x_{GS} = 70$
h) Scheitelpunktform:
$G(x) = -2,\overline{2}(x - 45)^2 + 1\,388,\overline{8}$
$\Rightarrow S(45/1\,388,\overline{8})$ [GE]



i) Graph der Preis-Absatz-Funktion: s. Abb.
j) Cournot'scher Punkt:
Für die gewinnmaximiale Ausbringungsmenge $x_{G_{\max}} = 45$ ergibt sich der Marktpreis $p_{G_{\max}}(45) = 110$ [ME/GE]
$\Rightarrow C(45/110)$.
Das Unternehmen wird 45 ME des Getränks produzieren und zu einem Preis von 110 GE/ME verkaufen.



7 a) Polypol, weil die Erlösfunktion wegen der konstanten Preis-Absatz-Funktion linear ist.
b) s. Abb.
c) $E(x) = K(x)$
$0,6x = 0,0004x^2 + 200$
$x_1 = 500$; $x_2 = 1\,000$
In den Schnittstellen sind die Kosten gleich den Erlösen, d. h. der Gewinn ist null.
d) $G(x) = E(x) - K(x)$
$G(x) = 0,6x - 0,0004x^2 - 200$
$G(x) = -0,0004x^2 + 0,6x - 200$
e) Scheitelform:
$G(x) = -0,0004 \cdot (x - 750)^2 + 25$
$\Rightarrow S(750/25) = H_G$
Die gewinnmaximale Produktionsmenge beträgt $x_{G_{\max}} = 750$ [ME]
Der maximale Gewinn beträgt $G_{\max} = G(750) = 25$ [GE]
f) s. Abb.
g) Break-even-Point (Gewinnschwelle): $x = 500$ [ME]



8 a) Schnittpunkte: $S_1(-0,4/-2,08)$; $S_2(0,4/-1,28) \Rightarrow g$ ist Sekante zu f
b) Berührpunkt: $S(1/1,5) \Rightarrow g$ ist Tangente zu f
c) Berührpunkt: $S(-2/-2) \Rightarrow g$ ist Tangente zu f
d) kein gemeinsamer Punkt $\Rightarrow g$ ist Passante zu f

9 a) g und f schneiden sich in $S_1(-1/2)$ und $S_2(0,25/0,125)$
b) g und f berühren sich in $S(-1/4)$
c) g und f berühren sich in $S(-0,75/2,5625)$
d) g und f haben keinen gemeinsamen Punkt