

Lösungen – Quadratische Gewinnfunktionen

Aufgabe 1

Gegeben: Gewinnschwelle bei 20 ME, Gewinngrenze bei 320 ME, maximaler Gewinn 562,5 GE bei 170 ME.

Da bei 20 ME und 320 ME der Gewinn 0 beträgt, sind dies die Nullstellen der Gewinnfunktion.

Wir wählen die Faktorform:

$$G(x) = a \cdot (x - 20) \cdot (x - 320)$$

Nun nutzen wir den maximalen Gewinn bei $x = 170$ ME:

$$G(170) = 562,5 = a \cdot (170 - 20) \cdot (170 - 320) = a \cdot 150 \cdot (-150) = -22500a$$

$$\Rightarrow a = 562,5 / (-22500) = -0,025 = -1/40$$

Damit:

$$G(x) = -0,025 \cdot (x - 20)(x - 320)$$

Ausmultipliziert:

$$(x - 20)(x - 320) = x^2 - 340x + 6400$$

$$G(x) = -0,025x^2 + 8,5x - 160$$

$$\text{Ergebnis: } G(x) = -0,025x^2 + 8,5x - 160$$

Aufgabe 2

Gegeben: Gewinnzone zwischen 40 und 120 ME $\Rightarrow$ Nullstellen bei $x = 40$ und $x = 120$.

Außerdem: $G(80) = 100.000$ GE.

Ansatz mit den Nullstellen:

$$G(x) = a \cdot (x - 40) \cdot (x - 120)$$

Einsetzen von $x = 80$:

$$G(80) = 100.000 = a \cdot (80 - 40) \cdot (80 - 120) = a \cdot 40 \cdot (-40) = -1600a$$

$$\Rightarrow a = 100.000 / (-1600) = -62,5 = -125/2$$

Damit:

$$G(x) = -62,5 \cdot (x - 40)(x - 120)$$

Ausmultipliziert:

$$(x - 40)(x - 120) = x^2 - 160x + 4800$$

$$G(x) = -62,5x^2 + 10.000x - 300.000$$

$$\text{Ergebnis: } G(x) = -62,5x^2 + 10.000x - 300.000$$

Aufgabe 3

Gegeben: Gewinnschwelle 20 ME, Gewinngrenze 60 ME $\Rightarrow$ Nullstellen bei $x = 20$ und $x = 60$.

Zusätzlich: $G(30) = 6000$ GE.

Ansatz mit Nullstellen:

$$G(x) = a \cdot (x - 20) \cdot (x - 60)$$

Einsetzen von $x = 30$:

$$G(30) = 6000 = a \cdot (30 - 20) \cdot (30 - 60) = a \cdot 10 \cdot (-30) = -300a$$
$$\Rightarrow a = 6000 / (-300) = -20$$

Damit:

$$G(x) = -20 \cdot (x - 20)(x - 60)$$

Ausmultipliziert:

$$(x - 20)(x - 60) = x^2 - 80x + 1200$$

$$G(x) = -20x^2 + 1600x - 24.000$$

Ergebnis: $G(x) = -20x^2 + 1600x - 24.000$

Aufgabe 4

Gegeben: Gewinnschwelle bei 20 ME $\Rightarrow G(20) = 0$.

Weiter: $G(40) = 100$ GE, $G(120) = -200$ GE (Verlust).

Allgemeiner Ansatz:

$$G(x) = ax^2 + bx + c$$

Einsetzen der drei Punkte:

1) $G(20) = 0$: $400a + 20b + c = 0$

2) $G(40) = 100$: $1600a + 40b + c = 100$

3) $G(120) = -200$: $14400a + 120b + c = -200$

Gleichung (2) – (1):

$$(1600a - 400a) + (40b - 20b) = 100 - 0 \Rightarrow 1200a + 20b = 100 \dots (I)$$

Gleichung (3) – (2):

$$(14400a - 1600a) + (120b - 40b) = -200 - 100 \Rightarrow 12800a + 80b = -300 \dots (II)$$

(II) durch 16: $800a + 5b = -18,75$

(I) durch 20: $60a + b = 5$

Aus $60a + b = 5 \Rightarrow b = 5 - 60a$.

Einsetzen in $800a + 5b = -18,75$:

$$800a + 5(5 - 60a) = -18,75 \Rightarrow 800a + 25 - 300a = -18,75$$

$$\Rightarrow 500a = -43,75 \Rightarrow a = -43,75 / 500 = -7/80$$

Dann $b = 5 - 60 \cdot (-7/80) = 5 + 21/4 = 41/4$.

Nun c aus (1): $400 \cdot (-7/80) + 20 \cdot (41/4) + c = 0$

$$\Rightarrow -35 + 205 + c = 0 \Rightarrow c = -170.$$

Damit:

$G(x) = -7/80 x^2 + 41/4 x - 170$

(bzw. in Dezimalschreibweise: $G(x) = -0,0875x^2 + 10,25x - 170$)

Aufgabe 5

Gegeben: Fixkosten 220 GE $\Rightarrow$ bei $x = 0$: $G(0) = -220$ GE.
Weiter: $G(4) = 28$ GE, $G(10) = -50$ GE.

Allgemeiner Ansatz:

$$G(x) = ax^2 + bx + c$$

Aus $G(0) = -220$ folgt $c = -220$.

$$G(4) = 28: 16a + 4b - 220 = 28 \Rightarrow 16a + 4b = 248 \dots (1)$$

$$G(10) = -50: 100a + 10b - 220 = -50 \Rightarrow 100a + 10b = 170 \dots (2)$$

$$(1) \text{ durch } 2: 8a + 2b = 124$$

$$(2) \text{ durch } 2: 50a + 5b = 85$$

Nun z.B. $(2) \cdot 2 - (1) \cdot 5$:

$$(100a + 10b) - (40a + 10b) = 170 - 620$$

$$\Rightarrow 60a = -450 \Rightarrow a = -7,5 = -15/2$$

Einsetzen in $8a + 2b = 124$:

$$8 \cdot (-7,5) + 2b = 124 \Rightarrow -60 + 2b = 124 \Rightarrow 2b = 184 \Rightarrow b = 92.$$

Damit:

$$\mathbf{G(x) = -7,5x^2 + 92x - 220}$$

Aufgabe 6

Gegeben: $G(20) = 1580$ GE, $G(10) = 805$ GE, $G(90) = 5$ GE.

Allgemeiner Ansatz:

$$G(x) = ax^2 + bx + c$$

Einsetzen der Punkte:

$$1) 400a + 20b + c = 1580 \dots (1)$$

$$2) 100a + 10b + c = 805 \dots (2)$$

$$3) 8100a + 90b + c = 5 \dots (3)$$

$$(1) - (2): 300a + 10b = 775 \dots (I)$$

$$(3) - (2): 8000a + 80b = -800 \dots (II)$$

$$(II) \text{ durch } 10: 800a + 8b = -80$$

$$(I) \text{ durch } 5: 60a + 2b = 155$$

Nun ein Gleichungssystem in a und b . Lösung (z.B. durch Einsetz- oder Additionsverfahren):

$$a = -5/4 = -1,25, b = 115.$$

$$c \text{ aus } (2): 100 \cdot (-5/4) + 10 \cdot 115 + c = 805$$

$$\Rightarrow -125 + 1150 + c = 805 \Rightarrow 1025 + c = 805 \Rightarrow c = -220.$$

Damit:

$$\mathbf{G(x) = -5/4 x^2 + 115x - 220}$$

$$(\text{bzw. } G(x) = -1,25x^2 + 115x - 220)$$

Aufgabe 7

Gegeben: Gewinnschwelle 10 ME, Gewinnngrenze 30 ME $\Rightarrow$ Nullstellen bei $x = 10$ und $x = 30$.
Fixkosten 900 GE $\Rightarrow G(0) = -900$ GE.

Ansatz mit Nullstellen:

$$G(x) = a \cdot (x - 10)(x - 30)$$

Einsetzen von $x = 0$:

$$G(0) = -900 = a \cdot (-10) \cdot (-30) = 300a$$

$$\Rightarrow a = -900 / 300 = -3$$

Damit:

$$G(x) = -3(x - 10)(x - 30)$$

Ausmultipliziert:

$$(x - 10)(x - 30) = x^2 - 40x + 300$$

$$G(x) = -3x^2 + 120x - 900$$

$$\text{Ergebnis: } G(x) = -3x^2 + 120x - 900$$

Aufgabe 8

Gegeben: Maximaler Gewinn 54 GE bei $x = 8$ ME $\Rightarrow$ Scheitelpunkt bei $x = 8$.
Weiter: $G(5) = 45$ GE, $G(10) = 50$ GE.

Wir nutzen zunächst die allgemeine Form:

$$G(x) = ax^2 + bx + c$$

Einsetzen der drei Punkte:

$$1) 25a + 5b + c = 45 \dots (1)$$

$$2) 64a + 8b + c = 54 \dots (2)$$

$$3) 100a + 10b + c = 50 \dots (3)$$

$$(2) - (1): 39a + 3b = 9 \dots (I)$$

$$(3) - (2): 36a + 2b = -4 \dots (II)$$

$$\text{Aus (II): } 18a + b = -2 \Rightarrow b = -2 - 18a.$$

Einsetzen in (I):

$$39a + 3(-2 - 18a) = 9 \Rightarrow 39a - 6 - 54a = 9$$

$$\Rightarrow -15a - 6 = 9 \Rightarrow -15a = 15 \Rightarrow a = -1$$

$$\text{Dann } b = -2 - 18 \cdot (-1) = 16.$$

$$c \text{ aus (1): } 25 \cdot (-1) + 5 \cdot 16 + c = 45$$

$$\Rightarrow -25 + 80 + c = 45 \Rightarrow 55 + c = 45 \Rightarrow c = -10.$$

Damit:

$$\mathbf{G(x) = -x^2 + 16x - 10}$$

Kontrolle: Scheitel $x = -b / (2a) = -16 / (2 \cdot -1) = 8 \Rightarrow$ passt zum Maximum.

Aufgabe 9

Gegeben: Gewinnschwelle 1 ME, Gewinnngrenze 7 ME $\Rightarrow$ Nullstellen bei $x = 1$ und $x = 7$.
Weiter: $G(4) = 45$ GE.

Ansatz mit Nullstellen:

$$G(x) = a \cdot (x - 1)(x - 7)$$

Einsetzen von $x = 4$:

$$G(4) = 45 = a \cdot (4 - 1) \cdot (4 - 7) = a \cdot 3 \cdot (-3) = -9a$$

$$\Rightarrow a = 45 / (-9) = -5$$

Damit:

$$G(x) = -5(x - 1)(x - 7)$$

Ausmultipliziert:

$$(x - 1)(x - 7) = x^2 - 8x + 7$$

$$G(x) = -5x^2 + 40x - 35$$

Ergebnis: $G(x) = -5x^2 + 40x - 35$