Mathematik-Übungsaufgaben

Thema: **Rentenrechnung/Zinseszinsrechnung**
Schulform: **Höhere Handelsschule**
Schwierigkeitsgrad: **mittel** **Bearbeitungszeit (ca.): 35 min.**

Der Bauunternehmer Peter Kohlhaas plant, sich in 10 Jahren zur Ruhe zu setzen und seinen Traum, eine Villa am Tegernsee, in die Tat umzusetzen. Er legt eröffnet daher ein Bankkonto und zahlt zu Beginn des ersten Jahres 120.000 Euro ein. Am Ende des ersten und jedes der fünf folgenden Jahre möchte er dem Konto 35.000 Euro hinzufügen. Zu Beginn des 7. Jahres wird er einen Betrag von 200.000 Euro auf sein Konto einzahlen. Vom Ende des 7. bis zum Ende des 10. Jahres zahlt er jährlich 20.000 Euro ein. Die Bank verzinst sein Guthaben während der gesamten Laufzeit mit 6% p.a..

a) Über welchen Kontostand verfügt er zu Beginn des 11. Jahres?

b) Wie lange hätte er die 20.000 Euro noch einzahlen müssen, um mindestens über einen Kontostand von 1 Mio. Euro verfügen zu können?

c) Welchen Betrag in Euro müsste er vom Ende des 7. bis zum Ende des 10. Jahres jährlich einzahlen, um zu Beginn des 11. Jahres über einen Kontostand von 1 Mio. Euro verfügen zu können?

d) Herr Kohlhaas bekommt nach Ablauf der 10 Jahre (Kontostand: 863.105,70 Euro) zwei Angebote, um seine Traumvilla zu bezahlen (Zinssatz jeweils 6,5%):
Angebot A: 350.000 Euro direkt, jeweils weitere 300.000 € zwei Jahre bzw. vier Jahre später.
Angebot B: einmalig 980.000 Euro, zahlbar zwei Jahre später
Welches Angebot ist günstiger für ihn? Könnte er sich das ungünstigere Angebot überhaupt leisten?

e) Welchen Jahresbetrag könnte er nach Ablauf der 10 Jahre insgesamt 15-mal zu Beginn eines Jahres bei einem Zinssatz von 6 % abheben, bis sein Guthaben aufgebraucht ist, falls er sich nach 10 Jahren gegen eine Villa am Tegernsee entscheiden sollte, und das vorhandene Vermögen nicht anderweitig investiert.

Lösungen

a)

$$E_6 = 120000 \cdot 1{,}06^6 + 35000 \cdot \frac{1{,}06^6 - 1}{0{,}06} \approx 414358{,}44 \text{ € am Ende des 6. Jahres}$$

$$E_{10} = 614358{,}44 \cdot 1{,}06^4 + 20000 \cdot \frac{1{,}06^4 - 1}{0{,}06} \approx 863105{,}70 \text{ € am Ende des 10. Jahres}$$

b)

$$1000000 = 863105{,}70 \cdot 1{,}06^n + 20000 \cdot \frac{1{,}06^n - 1}{0{,}06} \mid \cdot 0{,}06$$

$$60000 = 51786{,}342 \cdot 1{,}06^n + 20000 \cdot \left(1{,}06^n - 1\right)$$

$$60000 = \underbrace{51786{,}342 \cdot 1{,}06^n + 20000 \cdot 1{,}06^n}_{71786{,}342 \cdot 1{,}06^n} - 20000 \mid +20000$$

$$80000 = 71786{,}342 \cdot 1{,}06^n \mid : 71786{,}342$$

$$1{,}114418116 = 1{,}06^n$$

$$n = \frac{\log 1{,}114418116}{\log 1{,}06} \approx 1{,}86 \Rightarrow \text{ noch zwei weitere Jahre, um über 1000000 € zu haben}$$

c)

$$E_{10} = \underbrace{614358,44 \cdot 1,06^4}_{775613,3757} + r \cdot \frac{1,06^4 - 1}{0,06} = 1000000 \text{ €} \; |{-775613,3757}$$

$$r \cdot \frac{1,06^4 - 1}{0,06} = 224386,6243 \; | \cdot \frac{0,06}{1,06^4 - 1}$$

$$r \approx 51292,87 \text{ €}$$

d)

Angebot A: $350000 + \frac{300000}{1,065^2} + \frac{300000}{1,065^4} \approx 847694,71 \text{ €}$

Angebot B: $\frac{980000}{1,065^2} \approx 864026,10 \text{ €}$

Angebot A ist günstiger. Angebot B könnte er sich mit dem angesparten Kapital nicht ganz leisten.

e)

$$0 = \underbrace{863105,70 \cdot 1,06^{15}}_{2068483,037} - r \cdot \underbrace{1,06 \cdot \frac{1,06^{15} - 1}{0,06}}_{24,67252808} \; | -2068483,037$$

$$-2068483,037 = -r \cdot 24,67252808 \; |: (-24,67252808)$$

$$83837,50 \text{ €} = r$$