Aufgabe 1

Das DoItBeach in Trillingen-Nellingen ist das einzige Spaßbad in der Region und seit einigen Jahren kommerziell recht erfolgreich.
Die folgenden Funktionsgleichungen beschreiben die aktuelle Kosten- und Erlössituation.

$K(x) = 0{,}5 \cdot x^3 - 70 \cdot x^2 + 5000 \cdot x + 283.500$
$E(x) = -160 \cdot x^2 + 17.600 \cdot x$

$[x]$ = Anzahl der Besucher in 1000/Monat
$[K/E(x)]$ = Gesamtkosten/Gesamterlös in €/Monat

a) Zeigen Sie, dass gilt:
$p(x) = -160 \cdot x + 17.600$
$G(x) = -0{,}5 \cdot x^3 - 90 \cdot x^2 + 12.600 \cdot x - 283.500$

Beachten Sie bei den folgenden Aufgabenteilen **die Einheit von x.**

b) Bestimmen Sie den maximalen Gewinn.
Wie hoch ist bei der gewinnmaximalen monatlichen Besucherzahl der Gewinn pro Besucher?

c) Geben Sie an, in welchem Bereich die Zahl der Besucher pro Monat liegen muss, damit das DoItBeach mit Gewinn arbeitet.
Beachten Sie hierbei, dass bei einer Besucherzahl von 30.000 pro Monat weder ein Gewinn noch ein Verlust erwirtschaftet wird.
In welchem Preisbereich arbeitet das DoItBeach mit Gewinn?

d) Geben Sie den Cournotschen Punkt an. Erläutern Sie am Beispiel dieser Aufgabe die Bedeutung des Cournotschen Punkts.
Gehen Sie davon aus, dass der Gewinn bei 49.545 Besuchern/Monat maximal ist.

e) Die fixen Kosten steigen auf 300.000 €.
Zeigen Sie, dass das Betriebsoptimum unter dieser Voraussetzung bei 100.000 Besuchern/Monat liegt.
Geben Sie die langfristige Preisuntergrenze an.

Aufgabe 2

Herr Schmitz als Geschäftsführer des DoItBeach will nach den neuesten Berichten über die Entwicklung der Renten in Deutschland vorsorgen und entschließt sich, bis zu seinem Rentenalter in 16 Jahren eine Rentenversicherung bei der Kulanza Versicherungs-AG abzuschließen.

. Gehen Sie bei allen Aufgabenteilen von einer Rendite von **4,15%** aus.

a) Er entscheidet sich, bei der Kulanza eine Rentenversicherung abzuschließen.
Berechnen Sie den Rentenendwert, wenn er zu Beginn eines jeden Jahres 5.640,- € anlegt.

b) Herr Schmitz kann auf Grund einer Prämienzahlung für verdienstvolle Mitarbeiter an Anfang des 5. Jahres eine Sonderzahlung von 8.900 € in seine Rentenversicherung tätigen.
Um welchen Prozentsatz erhöht sich nach dieser Zahlung der Rentenendwert von ca. 130.000 € (siehe Teilaufgabe 1) bei gleichbleibender Rendite.

c) Gehen Sie davon aus, dass der Rentenendwert auf 145.000 € angewachsen ist.
Die Kulanza garantiert Herrn Schmitz nach Erreichen des Rentenalters eine vorschüssige jährliche Rentenzahlung von 12.653,50 €.
Wie viele Jahre kann Herr Schmitz eine Rente beziehen, wenn der angesparte Betrag vollständig aufgebraucht werden soll?

d) Herr Schmitz bekommt von der Kulanza das Angebot, für seinen angesparten Betrag von 145.000 € (s.o.), die Rentenzahlungen jeweils zum Ende eines jeden Jahres vorzunehmen. Über welchen Betrag kann er jetzt jedes Jahr verfügen, wenn er eine garantierte Rentenzahlung über 17 Jahre mit der Kulanza vereinbart?

e) Die Kulanza geht bei ihren Berechnungen für eine lebenslange Rentenzahlung davon aus, dass die Rente im Durchschnitt 13 Jahre lang ausgezahlt werden muss (wegen der Lebenserwartung der Versicherungsnehmer).
Kann die Kulanza mit dem angesparten Kapital von 145.000 € eine jährliche nachschüssige Rente von 12.058 € zahlen?
Macht sie hierbei einen Gewinn? Berechnen Sie diesen gegebenenfalls.

Aufgabe 3:

Beim Biathlon beträgt die Treffsicherheit eines Teilnehmers beim Stehendschießen nur 60 %.

Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er bei seiner Serie von 10 Schüssen

a) keinen,

b) genau einen,

c) mindestens fünf,

d) höchstens fünf … **Treffer** hat!

Aufgabe 4:

Die Nett GmbH vertreibt LED-Lichterketten. Jede Verpackungseinheit enthält 250 Lichterketten. Von diesen sind 12 % defekt.
Falls in einer Verpackungseinheit 20 oder weniger Lichterketten defekt sind, erhält die Nett GmbH 10.000 € pro Verpackungseinheit.

Sind mehr als 20 Lichterketten defekt, so wird der Absatzpreis um 20 % gesenkt.

a) Ermittle viel Euro pro Verpackungseinheit die Nett GmbH durchschnittlich erzielen kann!

b) Wie viele Lichterketten muss ich auswählen, um mit einer 99%-igen Wahrscheinlichkeit eine defekt zu erwischen?

Aufgabe 1	Punkte

a)

- $p(x)=\frac{E(x)}{x} \Leftrightarrow p(x)=\frac{-160x^2+17600\cdot x}{x} \Leftrightarrow p(x)=-160x+17600$
- $G(x)=E(x)-K(x) \Leftrightarrow G(x)=-160\cdot x^2+17.600\cdot x-(0{,}5\cdot x^3-70x^2+5.000\cdot x+283.500)$

  $G(x)=-0{,}5\cdot x^3-90x^2+12.600\cdot x-283500$

3

b)

$G'(x)=-1{,}5\cdot x^2-180x+12600$

$G''(x)=-3\cdot x-180$

$G'(x)=0 \Leftrightarrow -1{,}5\cdot x^2-180x+12600=0$;

mit der p/q-Formel erhält man:

$x=49.545 \vee x=-169.545$

$G''(49{,}545)=-3\cdot 49{,}545-180<0$; $49{,}545$ *ist also eine Hochstelle*

$G_{max}=G(49{,}545)=59034$

Den maximalen Gewinn von 59.034 € (pro Monat) erhält man bei einer Besucherzahl von 49.545 Besuchern pro Monat.
Der Gewinn pro Besucher liegt hier bei ca. 1,19 €.

7

c)

$G(x)=0 \Leftrightarrow -0{,}5\cdot x^3-90x^2+12600\cdot x+283500=0$

$(-0{,}5\cdot x^3-90x^2+12600\cdot x+283500):(x-30)=-0{,}5\cdot x^2-105\cdot x+9450$

$-0{,}5\cdot x^2-105\cdot x+9450=0$

führt zu den weiteren Nullstellen <u>x = -277,988</u> und <u>x = 67,988</u>.
Gewinnzone: <u>[30;67,988]</u>
Das Bad arbeitet also bei einer monatlichen Besucherzahl von 30.000 bis 67.988 mit Gewinn.

Es gilt: p(x) = - 160·x +17600
p(30) = 12.800 <u>Preis/Besucher 12,80 €</u>
p(67,988) = 6.721,92 <u>Preis/Besucher 6,72 €</u>
Bei einem Eintrittspreis von 6,71 € und 12,80 € arbeitet das Bad mit Gewinn.

10

d)

Cournotscher Punkt: $p(49{,}545)=9672{,}8 \Rightarrow C(49{,}545;9672{,}8)$

Bedeutung des C.P.:
Bei einem Preis von 9,67 €/Besucher wird der Gewinn maximal.

3

e)

Mit den erhöhten fixen Kosten erhält man:

$k(x)=0{,}5\cdot x^2-70\cdot x+5000+\frac{300.000}{x}$

$k'(x)=x-70-\frac{300.000}{x^2}$ und $k''(x)=1+\frac{600.000}{x^3}>0 \;\forall\; x>0$

$k'(100)=100-70-\frac{300.000}{100^2}=100-70-30=0$

$k(100)=0{,}5\cdot 100^2-70\cdot 100+5000+\frac{300.000}{100}=6000$

Die langfristige Preisuntergrenze liegt also bei 6000 € / 1000Besucher, d.h. bei 6 € / Besucher.

7

Aufgabe 3	Punkte
a) $Rentenendwert\ vorschüssig: R_n = r \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}$ mit q = 1,0415, n = 16 und K_0 = 5.640 € erhält man $R_{16} = 5640 \cdot 1{,}0415 \cdot \frac{1{,}0415^{16} - 1}{1{,}0415 - 1} = 129.749{,}44$ Rentenendwert: 129.749,44 €	3
b) $K_n = K_0 \cdot q^n$ mit q = 1,0415, n = 12 und r = 8.900 € erhält man $K_{12} = 8900 \cdot 1{,}0415^{12} = 14497{,}77$ Ausgangswerte sind also 130.000 und 144.497,77, damit erhält man: $\frac{130.000}{100} = \frac{144.497{,}77}{x} \Leftrightarrow x = \frac{100 \cdot 144.497{,}77}{130.000} = 111{,}15$ d.h. Steigerung um 11,15 %	5
c) $145.000 \cdot 1{,}0415^n = 12.653{,}50 \cdot 1{,}0415 \cdot \frac{1{,}0415^n - 1}{1{,}0415 - 1}$ $\Leftrightarrow \frac{145.000 \cdot 0{,}0415}{12.653{,}50 \cdot 1{,}0415} \cdot 1{,}0415^n = 1{,}0415^n - 1 \Leftrightarrow 0{,}4566 \cdot 1{,}0415^n = 1{,}0415^n - 1$ $\Leftrightarrow 0{,}5434 \cdot 1{,}0415^n = 1 \Leftrightarrow 1{,}0415^n = \frac{1}{0{,}5434} \Leftrightarrow n \cdot lg(1{,}0415) = lg\left(\frac{1}{0{,}5434}\right)$ $\Leftrightarrow n = 14{,}999 \approx 15$ Herr Schmitz kann die Rente 15 Jahre lang beziehen.	7
d) $145.000 \cdot 1{,}0415^{17} = r \cdot \frac{1{,}0415^{17} - 1}{1{,}0415 - 1}$ $\Leftrightarrow r = 145.000 \cdot 1{,}0415^{17} \cdot \frac{1{,}0415 - 1}{1{,}0415^{17} - 1} = 12.057{,}85$ Herr Schmitz kann eine Rente von 12.057,85 € pro Jahr beziehen.	4
e) $K_{13} = 145.000 \cdot 1{,}0415^{13} = 246.001{,}95$ $R_{13} = 12.060 \cdot \frac{1{,}0415^{13} - 1}{1{,}0415 - 1} = 202.423{,}53$ Wert des Kapitals Ende des 13. Jahres: 246.001,95 € Wert der Rente Ende des 13. Jahres: 202.423,53 € Die Kulanza kann am Ende des 13.Jahres mit einem Gewinn von 43.578,42 € rechnen.	6

Aufgabe 3: a) B(10;0,6;0) = 0,01 % b) B(10;0,6;1) = 0,157 % c) 1- F(10;0,6;4) = 83,38 % d) F(10;0,6;5) = 36,69 %	8

Aufgabe 4:

Wie viele Lichterketten muss ich auswählen, um mit einer 99%-igen Wahrscheinlichkeit eine defekt zu erwischen?

a)

N=250, p=0,12

X= defekte Lichterketten	X<= 20	21<=X<=250
Verkaufspreis	10.000,00 €	8.000,00 €
Wahrscheinlichkeit	F(250;012;20) = 0,0274	1-(F250;0,12;20) = 0,9726

Ew(VE) = 0,0274*10.000+0,9726*8.000 = 8.054,80 € 6

a) Wie viele Lichterketten muss ich auswählen, um mit einer 90%igen Wahrscheinlichkeit eine defekt zu erwischen?

X = Anzahl defekter Lichterketten

P(X>= 1) >= 0,99 also: 1-P(X=0) >= 0,99

P(X=0) <= 0,01

B(n;0,12;0) <=0,01

$\binom{n}{0} \cdot 0{,}12^0 \cdot 0{,}88^n \leq 0{,}01 \quad \rightarrow$ n= 36,025 6

Folglich müsste ich 37 Lichterketten auswählen!