

**!!!!!!!WICHTIG!!!!!!!**

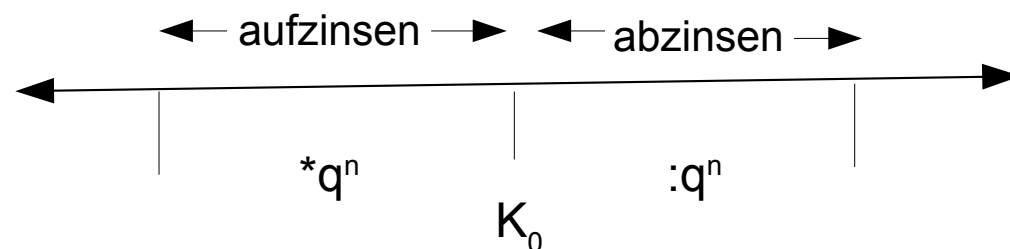
Zahlungen, die zu unterschiedlichen Zeitpunkten erfolgen, können nicht addiert, subtrahiert bzw. untermittelbar miteinander verglichen werden. Um dies zu tun, müssen diese Zahlungen auf einen einheitlichen Zeitpunkt auf- oder abgezinst werden. Häufig wird der Barwert  $K_0$  berechnet. Das ist der Wert aller Zahlungen auf- bzw. abgezinst zum Zeitpunkt 0 (jetzt). Dies ist eine rein rechnerische Größe, um die Zahlungen miteinander zu vergleichen. Dabei werden einzelne Zahlungen unabhängig von einander betrachtet.

**Abzinsen:** (*Betrag wird kleiner!!!!!*)

-> :  $q^n$  → hier wird berechnet, wie viel die Zahlung  $K_n$ , die in der Zukunft (in n Jahren) liegt, heute wert wäre bzw. über welches Kapital  $K_0$  ich heute verfügen müsste (... und es anlegen) um in n Jahren dieses Kapital  $K_n$  zu haben.

**Aufzinsen:** (*Betrag wird größer!!!!!*)

-> \*  $q^n$  → hier wird berechnet, auf wie viel die Zahlung angewachsen wäre, wenn ich sie zu dem Zinssatz p angelegt hätte.

**Beispiele: Berechnung des Barwertes  $K_0$** 

Zinssatz  $p = 5\% \rightarrow q = 1,05$

Vor 3 Jahren hat man eine Zahlung vom 100 Euro erhalten: → aufzinsen durch  $100 * 1,05^3$

In 5 Jahren erhält man eine Zahlung von 120 Euro : → abzinsen durch  $120 : 1,05^5$



**Beispiel mit Zinswechsel:** (Bemerkung: Zahlungen erfolgen jeweils am Ende des Jahres!)

	$K_{-5}$	$K_{-4}$	$K_{-3}$	$K_{-2}$	$K_{-1}$	$K_0$	$K_1$	$K_2$	$K_3$	$K_4$	$K_5$
<b>Jahr</b>	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
<b>n</b>	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
<b>Zahlung Nr</b>		Z1		Z2		Z3		Z4		Z5	Z6
<b>Zahlungen</b>		1.000 €		1.500 €		3.000 €		1.800 €		2.200 €	3.100 €
<b>Zinssatz</b>	4%	4%	4%	5%	2%	2%	2%	3%	3%	3%	7%

### Berechnung des Barwertes $K_0$ :

- Z1: Ist eine Zahlung vor 4 Jahren, muss also 4 Jahre aufgezinnt werden. Das erste Jahr mit 4%, ein weiteres Jahre mit 5% und dann noch zwei Jahre mit 2%, d.h.  $1000 * 1,04^1 * 1,05 * 1,02^2$
- Z2: Ist eine Zahlung vor 2 Jahren, muss also 2 Jahre aufgezinnt werden, jeweils mit 2%, d.h.  $1500 * 1,02^2$
- Z3: Ist eine Zahlung zum Bezugszeitpunkt heute. =3000 (kein auf- oder abzinsen erforderlich).
- Z4: Ist eine Zahlung in 2 Jahren, muss also 2 Jahre abgezinst werden. Das erste Jahr mit 3%, ein weiteres Jahre mit 2%. und dann noch ein Jahr mit 2%, d.h.  $1800 : 1,02^1 : 1,03^1$
- Z5: Ist eine Zahlung in 4 Jahren, muss also 4 Jahre abgezinst werden. Die ersten drei Jahre mit 3%, ein weiteres Jahre mit 2%. , d.h.  $2200 : 1,03^3 : 1,02^1$
- Z6: Ist eine Zahlung in 5 Jahren, muss also 5 Jahre abgezinst werden. Die erste Jahr mit 7%, dann drei Jahre mit 3%, ein weiteres Jahre mit 2%. , d.h.  $3100 : 1,07^1 : 1,03^3 : 1,02^1$

**Anmerkung zur Eingabe in den TR:** Beim Abzinsen muss nach jedem „: q<sup>n</sup>“ enter gedrückt werden oder entsprechende Klammern gesetzt werden.

Die Zahlungen können auch verglichen werden, wenn man anstatt des Barwertes einen beliebigen anderen Zeitpunkt wählt, zum Beispiel  $K_4$ . Dann werden alle Zahlungen vor  $K_4$  noch weiter aufgezinnt und  $K_5$  ein Jahr abgezinst bzw.  $K_0 * 1,02^1 * 1,03^3$ .



	$K_{-5}$	$K_{-4}$	$K_{-3}$	$K_{-2}$	$K_{-1}$	$K_0$	$K_1$	$K_2$	$K_3$	$K_4$	$K_5$
<b>Jahr</b>	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
<b>n</b>	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
<b>Zinssatz</b>	4%	4%	5%	5%	2%	2%	2%	3%	3%	3%	7%
<b>Zahlungen</b>											
<b>Anbieter A</b>	1.000 €		1.000 €		1.000 €		1.000 €		1.000 €		1.000 €
<b>Anbieter B</b>		1.500 €				1.500 €				1.500 €	1.500 €
<b>Anbieter C</b>	2.000 €		2.000 €			2.000 €					
<b>Anbieter D</b>								1.550 €	1.550 €	1.550 €	1.550 €

**Aufgabe:** Vergleiche die Angebote der Anbieter, indem Du zunächst den Barwert  $K_0$  ausrechnest. Berechne dann auch  $K_5$  für jeden Anbieter.

<b>Anbieter A</b>	
$K_0 =$	$K_5 =$
<b>Anbieter B</b>	
$K_0 =$	$K_5 =$
<b>Anbieter C</b>	
$K_0 =$	$K_5 =$
<b>Anbieter D</b>	
$K_0 =$	$K_5 =$



## Rentenrechnung

**Rente:** ... bedeutet in der Mathematik regelmäßige Zahlung – entweder am Jahresanfang ( $\rightarrow$  *vorschüssig*) oder am Jahresende ( $\rightarrow$  *nachschüssig*), d.h. jedes Jahr wird ein gleichgroßer Betrag  $r$  angelegt.

$R_n$ : Ist der Wert auf den die Zahlungen nach  $n$  Jahren angewachsen sind.

Beispiel: Rente  $r = 1000$  Euro / Zahlung erfolgt nachschüssig, Zinssatz  $p = 5\%$

Jahr	n	K Anfang des Jahres	Zinsen 5%	Einzahlung $r$ (nachschüssig)	K Ende des Jahres
2017	1	0	0	1.000 €	1.000 €
2018	2	1.000 €	50 €	1.000 €	2.050 €
2019	3	2.050 €	103 €	1.000 €	3.153 €
2020	4	3.153 €	158 €	1.000 €	4.310 €
2021	5	4.310 €	216 €	1.000 €	5.526 €
2022	6	5.526 €	276 €	1.000 €	6.802 €
2023	7	6.802 €	340 €	1.000 €	8.142 €
2024	8	8.142 €	407 €	1.000 €	9.549 €
2025	9	9.549 €	477 €	1.000 €	11.027 €
2026	10	11.027 €	551 €	1.000 €	12.578 €
2027	11	12.578 €	629 €	1.000 €	14.207 €
2028	12	14.207 €	710 €	1.000 €	15.917 €
2029	13	15.917 €	796 €	1.000 €	17.713 €
2030	14	17.713 €	886 €	1.000 €	19.599 €

**Formeln:**

Nachschüssige Rente:

$$R_n = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$
$$r = R_n \cdot \frac{q - 1}{q^n - 1}$$
$$n = \frac{\lg \left( \frac{R_n \cdot (q - 1)}{r} + 1 \right)}{\lg q}$$

vorschüssige Rente

$$R_n = r \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$
$$r = R_n \cdot \frac{q - 1}{q \cdot (q^n - 1)}$$
$$n = \frac{\lg \left( \frac{R_n \cdot (q - 1)}{r \cdot q} + 1 \right)}{\lg q}$$

oder

$$R_{14} = 1000 \cdot (1,05^{14} - 1) / 0,05 = \mathbf{19599 \text{ €}}$$

**Rentenrechnung mit Zinswechsel / Variation der Rentenhöhe**

Jahr	n	K Anfang des J.	Zinssatz	Zinsen	Einzahlung r (nachschüssig)	K Ende des J.
2017	1	0	5%	0	1.000 €	1.000 €
2018	2	1.000 €	5%	50 €	1.000 €	2.050 €
2019	3	2.050 €	5%	103 €	1.000 €	3.153 €
2020	4	3.153 €	5%	158 €	0 €	3.310 €
2021	5	3.310 €	5%	166 €	1.000 €	4.476 €
2022	6	4.476 €	5%	224 €	1.000 €	5.699 €
2023	7	5.699 €	5%	285 €	1.000 €	6.984 €
2024	8	6.984 €	3%	210 €	1.000 €	8.194 €
2025	9	8.194 €	3%	246 €	1.000 €	9.440 €
2026	10	9.440 €	3%	283 €	1.000 €	10.723 €
2027	11	10.723 €	3%	322 €	1.500 €	12.545 €
2028	12	12.545 €	3%	376 €	1.500 €	14.421 €
2029	13	14.421 €	3%	433 €	1.500 €	16.354 €
2030	14	16.354 €	3%	491 €	1.500 €	18.344 €

**Was passiert?**

1. Im 1. bis 3. Jahr wird 1000 Euro eingezahlt.
2. Im 4. Jahr bleibt die Zahlung aus.
3. Nach 7 Jahren wird der Zinssatz geändert.
4. Im 11. Jahr wird die Zahlung erhöht.

**Wieviel Geld habe ich nach 14 Jahren?****Rechnung:**

→ Bei jeder Änderung wird der Zahlungsstrom unabhängig von einander berechnet und auf den Zielzeitpunkt (hier  $R_{14}$ ) aufgezinst.

1. Drei Jahre lang jeweils 1000 Euro zu 5%; dieser Betrag wird noch 4 Jahre lang zu 5% verzinst und noch weitere 7 Jahre zu 3%  
 $R_{14} = (1000 * (1,05^3 - 1) / 0,05) * 1,05^4 * 1,03^7$
2. Im Jahr 2021 werden nochmal drei Jahre lang jeweils 1000 Euro zu 5% angelegt. Diese werden noch weitere 7 Jahre zu 3% verzinst.  
 $R_{14} = (1000 * (1,05^3 - 1) / 0,05) * 1,03^7$
3. Im Jahr 2024 werden nochmal drei Jahre lang jeweils 1000 Euro zu 3% angelegt. Diese werden noch weitere 4 Jahre zu 3% verzinst.  
 $R_{14} = (1000 * (1,03^3 - 1) / 0,03) * 1,03^4$
4. Im Jahr 2027 werden nochmal vier Jahre lang jeweils 1500 Euro zu 3% angelegt.  
 $R_{14} = (1500 * (1,03^4 - 1) / 0,03)$

→ Alle 4 Ergebnisse müssen addiert werden.

**Barwert der Rente:**  $R_0 = (R_{14} : 1,05^7) : 1,03^7$



**Aufgaben: Wie hoch ist der Rentenendwert?**

1. In den ersten 4 Jahren erfolgt eine Einzahlung von jeweils 2000 Euro, in den Jahren 5 bis 12 wird jeweils 5000 Euro eingezahlt. Der Zinssatz beträgt konstant 4%.

$$R_{12} =$$

2. 15 Jahre lang wird eine Einzahlung in Höhe von 10.000 Euro nachschüssig getätigt. Der Zinssatz beträgt in den ersten fünf Jahren 5%, dann 7%.

$$R_{15} =$$

3. In den ersten 4 Jahren erfolgt eine Einzahlung von jeweils 2000 Euro, in den Jahren 5 bis 12 wird jeweils 5000 Euro eingezahlt. Der Zinssatz beträgt in den ersten fünf Jahren 5%, dann 7%. Alle Zahlungen erfolgen nachschüssig.

$$R_{12} =$$

4. 15 Jahre lang wird nachschüssig 8000 Euro einbezahlt, außer im 9. Jahr. Da wird mit der Zahlung ausgesetzt. Der Zinssatz beträgt konstant 3,5%.

$$R_{15} =$$