



Das charakteristische bei einem **Annuitätendarlehn** ist, dass die Schuld durch eine **gleichbleibende Zahlung** (hier a oder r) zurückbezahlt wird.

Beispiel: Tilgungsplan & anfängliche Tilgung

John kauft sich ein Haus und finanziert 250.000 Euro durch ein Darlehn. Er kann jährlich 24.000 Euro zur Begleichung des Kredits aufbringen.
Darlehn $R_0 = 250.000$; $r = 24.000$ Euro ; $p = 2,5\%$

Tilgungsplan

Jahr	Schulden Anfang des Jahres K_a	Zinsen	Tilgung	Schulden Ende des Jahres K_e
1	250.000,00 €	6.250,00 €	17.750,00 €	232.250,00 €
2	232.250,00 €	5.806,25 €	18.193,75 €	214.056,25 €
3	214.056,25 €	5.351,41 €	18.648,59 €	195.407,66 €
4	195.407,66 €	4.885,19 €	19.114,81 €	176.292,85 €
5	176.292,85 €	4.407,32 €	19.592,68 €	156.700,17 €
6	156.700,17 €	3.917,50 €	20.082,50 €	136.617,67 €
7	136.617,67 €	3.415,44 €	20.584,56 €	116.033,11 €
8	116.033,11 €	2.900,83 €	21.099,17 €	94.933,94 €
9	94.933,94 €	2.373,35 €	21.626,65 €	73.307,29 €
10	73.307,29 €	1.832,68 €	22.167,32 €	51.139,97 €
11	51.139,97 €	1.278,50 €	22.721,50 €	28.418,47 €
12	28.418,47 €	710,46 €	23.289,54 €	5.128,93 €
13	5.128,93 €	128,22 €	23.871,78 €	-18.742,84 €
14	-18.742,84 €	-468,57 €	24.468,57 €	-43.211,41 €

Rechnung

$Z = p \cdot K$

$T = r - Z$

$K_e = K_a - T$

$$\text{Anfängliche Tilgung} = \text{Tilgung im ersten Jahr} / \text{Schulden im Jahr 1}$$

$$= 17.750 / 250.000 = 0,0710 = 7,1\%$$

Aufgaben:

- Hans kauft sich in Leverkusen eine Einfamilienhaus, das er mit einem Kredit finanziert. Kreditbetrag: 430.000 Euro; $p = 3\%$; Annuität 20.000 Euro. Erstelle eine Tilgungsplan für die ersten vier Jahre und bestimme die anfängliche Tilgung in %:
- Wie hoch ist die Annuität, wenn der Zinssatz 2%, die anfängliche Tilgung 4% und das Darlehn 150.000 Euro beträgt.



1.1 Restschuld nach n Jahren – ohne Sonderlocken

$RS_n =$	$Ko * q^n$	$- r * (q^n - 1) / p$
	auf diesen Betrag wächst die Schuld, wenn ich nichts zurückbezahle	vermindert um den Betrag, den ich durch die jährlichen Zahlungen anspare
Beispiel: Wie hoch ist Johns Restschuld nach 10 Jahren? ($R_0 = 250.000$; $r = 24.000$ Euro ; $p = 2,5\%$; $n=10$)		
$RS_{10} =$	$250.000 * 1,025^{10} -$ $= 320.021,14 -$	$24.000 * (1,025^{10} - 1) / 0,025$ $= 268.881,16$
$RS_{10} = 51.139,97$		

1.2. Restschuld nach n Jahren – mit Sondertilgung

Sondertilgung - Beispiel wie 1.1, nur Sondertilgung im Jahr 7: 15.000 Euro

$RS_{10} =$	$250.000 * 1,025^{10} -$ $= 320.021,14 -$	$24.000 * (1,025^{10} - 1) / 0,025 -$ $= 268.881,1$	$15.000 * 1,025^3$ $= 16153,36$
	(wie oben)	(wie oben)	Sondertilgung von 15.000 im Jahr 7, dieses Kapital verzinst sich noch 3 Jahre (bis Jahr 10)
$RS_{10} = 34.986,61$			

1.3. Restschuld nach n Jahren – mit Tilgungsaussetzung

Tilgungsaussetzung - Beispiel wie 1.1, nur Zahlungsaussetzung im Jahr 5 + 6.

$RS_{10} =$	$250.000 * 1,025^{10} -$ $= 320.021,14$	$(24.000 * (1,025^4 - 1) / 0,025) * 1,025^6 -$ $= 115575,48$	$24.000 * (1,025^4 - 1) / 0,025$ $= 99660,38$
	auf diesen Betrag wächst die Schuld, wenn ich nichts zurückbezahle (wie oben)	Vermindert um die regelmäßigen Zahlungen aus den ersten 4 Jahren. Diese Kapital wird noch weitere 6 Jahre aufgezinnt (Jahr 5 bis 10).	Zusätzlich vermindert um die Zahlungen in den Jahren 7 bis 10, also 4 Jahre hier.
$RS_{10} = 104785,58$			



1.4. Restschuld nach n Jahren – bei Zinswechsel

Zinswechsel - Beispiel wie 1.1, nur Zinswechsel – die ersten 4 Jahre 2,5%, dann 4%			
$RS_{10} =$	$250.000 * 1,025^4 1,04^6 -$ = (ausrechnen)	$(24.000 * (1,025^4 - 1)/0,025) * 1,04^6 -$ = (ausrechnen)	$24.000 * (1,04^6 - 1)/0,04$ = (ausrechnen)
	auf diesen Betrag wächst die Schuld, wenn ich nichts zurückbezahle; zunächst wird das Kapital mit 2,5% verzinst, dann 6 Jahre lang mit	Vermindert um die regelmäßigen Zahlungen aus den ersten 4 Jahren. Diese Kapital wird noch weitere 6 Jahre mit $p = 4\%$ aufgezinnt.	Zusätzlich vermindert um die Zahlungen, die mit einem anderen Zinssatz verzinst werden. Hier in den Jahren 5 bis 10 (6 Zahlungen) verzinst mit $p = 4\%$
$RS_{10} =$ _____ (ausrechnen)			

1.5. Restschuld nach n Jahren – bei Änderung der Annuität

Zinswechsel - Beispiel wie 1.1, nur Änderung der Annuität – die ersten 4 Jahre 24.000Euro , dann 30.000 Euro			
$RS_{10} =$	$250.000 * 1,025^{10} -$ = 320.021,14 -	$(24.000 * (1,025^4 - 1)/0,025) * 1,025^6 -$ = (ausrechnen) -	$30.000 * (1,025^6 - 1)/0,025)$ = (ausrechnen)
	auf diesen Betrag wächst die Schuld, wenn ich nichts zurückbezahle; zunächst wird das Kapital mit 2,5% verzinst, dann 6 Jahre lang mit	Vermindert um die regelmäßigen Zahlungen aus den ersten 4 Jahren. Diese Kapital wird noch weitere 6 Jahre aufgezinnt.	Zusätzlich vermindert um die Zahlungen in Höhe von 30.000 Euro in den Jahren 5 bis 10 (6 Zahlungen).
$RS_{10} =$ _____ (ausrechnen)			

Aufgabe:

Wie hoch ist die Restschuld nach 10 Jahren?

Darlehn $R_0 = 250.000$; $r = 24.000$ Euro in den Jahren 1-4, sonst 30.000 Euro;

$p = 2,5\%$ in den Jahren 1-4, sonst 4%;

Sondertilgung im Jahr 7: 15.000 Euro und Zahlungsaussetzung im Jahr 5 + 6.



2. Wieviel Kapital kann ich mir leihen, wenn ich zur Finanzierung 30.000 Euro jährlich aufbringen kann und der Kredit in 15 Jahren getilgt sein soll? (Zinssatz 2,5%)

Überlegung : $RS_{15} = 0 \rightarrow$ da ich nach 15 Jahren keine Schulden mehr habe. Gesucht: R_0

Formel	Beispiel	Rechenoperation
$0 = Ko * q^n - r * (q^n - 1) / p$	$0 = Ko * 1,025^{15} - 30.000 * (1,025^{15} - 1) / 0,025$	$I + 30.000 * (1,025^{15} - 1) / 0,025$
$Ko * q^n = r * (q^n - 1) / p$	$Ko * 1,025^{15} = 30.000 * (1,025^{15} - 1) / 0,025$	$I : 1,025^{15}$
$Ko = r * (q^n - 1) / (p * q^n)$	$Ko = (30.000 * (1,025^{15} - 1) / 0,025) / 1,025^{15}$	TR ausrechnen
	<u>Ko = 371.441,33</u>	

3. Wieviel hoch ist meine jährliche Annuität, wenn ich 300.000 Euro finanzieren möchte und der Kredit in 15 Jahren getilgt sein soll? (Zinssatz 2,5%)

Überlegung : $RS_{15} = 0 \rightarrow$ da ich nach 15 Jahren keine Schulden mehr habe. Gesucht: r

Formel	Beispiel	Rechenoperation
$0 = Ko * q^n - r * (q^n - 1) / p$	$0 = 300.000 * 1,025^{15} - r * (1,025^{15} - 1) / 0,025$	$I + r * (1,025^{15} - 1) / 0,025$
$Ko * q^n = r * (q^n - 1) / p$	$300.000 * 1,025^{15} = r * (1,025^{15} - 1) / 0,025$	$I : (1,025^{15} - 1) / 0,025$
$r = Ko * p * q^n / (q^n - 1)$	$r = 300.000 * 1,025^{15} * 0,025 / (1,025^{15} - 1)$	ausrechnen
	<u>r = 24.229,94</u>	

4. In wie vielen Jahren habe ich meinen Kredit getilgt, wenn ich 300.000 Euro finanzieren möchte und 30.000 Euro jährlich aufbringen kann?

(Zinssatz 2,5%)

Überlegung : $RS_n = 0 \rightarrow$ da ich nach n Jahren keine Schulden mehr habe. Gegeben $r; R_0, p$ gesucht: n

	Beispiel	Rechenoperation
1	$0 = 300.000 * 1,025^n - 30.000 * (1,025^n - 1) / 0,025$	Ausrechnen: $30.000 / 0,025 = 1200.000$
2	$0 = 300.000 * 1,025^n - 1.200.000 * (1,025^n - 1)$	Klammer auflösen Achtung: Vorzeichen !!!!!
3	$0 = 300.000 * 1,025^n - 1.200.000 * 1,025^n + 1.200.000$	$I - 1.200.000$ $I 1,025^n$ ausklammern
4	$-1.200.000 = 1,025^n (300.000 - 1.200.000)$	Ausrechnen: $(300.000 - 1.200.000) = - 900.000$ $I : - 900.000$
5	$-1.200.000 / -900.000 = 1,33 = 1,025^n$	$I \ln$
6	$\ln(1,33) = \ln(1,025^n) = n * \ln(1,025)$	Logarithmus-Regel anwenden $I : \ln(1,025)$



7	$\ln(1,33) / \ln(1,025) = n = 11,55$
---	--------------------------------------

<i>Ausrechnen: → Er braucht 12 Jahre.</i>

Aufgaben:**Wie hoch ist die Restschuld nach 10 Jahren?**

Darlehn $R_0 = 250.000$; $r = 24.000$ Euro in den Jahren 1-4, sonst 30.000 Euro;

$p = 2,5\%$ in den Jahren 1-4, sonst 4%;

Sondertilgung im Jahr 7: 15.000 Euro und Zahlungsaussetzung im Jahr 5 + 6.

Hans kauft sich in Leverkusen eine Einfamilienhaus, das er mit einem Kredit finanziert. **Kreditbetrag: 430.000 Euro; $p = 3\%$; Annuität 20.000 Euro.**

1. Wie hoch ist die Restschuld nach 10 Jahren?
2. Wie hoch ist die Restschuld nach 10 Jahren, wenn er im 5. Jahr mit der Zahlung aussetzt?
3. Wie hoch ist die Restschuld nach 10 Jahren, wenn er im 5. Jahr mit der Zahlung aussetzt, aber im Jahr 8 20.000 Euro sondertilgt?
4. Wie 1, sich aber der Zinssatz im 7. Jahr auf 4,5% erhöht?
5. Wie 3, sich aber der Zinssatz im 7. Jahr auf 4,5% erhöht?
6. Wie lange muss er den Kredit tilgen, wenn der Zinssatz sich nicht ändert? (Situation wie in 1.)
7. Wie lange muss er tilgen, wenn der Zinssatz nach 10 Jahren auf 5% steigt?

$p = 3\%$; $n = 18$

8. Welchen Kreditbetrag kann er finanzieren, wenn er jährlich 32.000 Euro aufbringen kann und den Kredit in 18 Jahren zurückbezahlt haben möchte? (ges. K_0)
9. Wie hoch ist die Annuität, wenn er über 450.000 Euro verfügen und den Kredit in 18 Jahren zurückbezahlt haben möchte? (ges. r)