



### Rentenrechnung – Bestimmung der Laufzeit

**Fall 1: Regelmäßiges Sparen um nach Ablauf der Zeit über eine gewisse Summe zu verfügen**

Herr / Frau x möchte über Kapital in Höhe von  $R_n$  verfügen. Er/sie kann am Ende jeden Jahres Kapital in Höhe von  $r$  zurücklegen. Wie lange muss er/sie sparen? → Gesucht:  $n$

Gegeben		Beispiel
$R_n$ :	Kapital nach $n$ Jahren	Wir benötigen 1.500.000
$p$ :	Zinssatz	5,00%
$r$ :	regelmäßige Zahlung	nachschüssig wird jedes Jahr 45.000 Euro gespart

	Formel	Was wurde gemacht ...	Beispiel
1	$R_n = r \cdot (q^n - 1) / p$	Formel aufstellen	$1.500.000 = 45.000 \cdot (1,05^n - 1) / 0,05$
2	$R_n = r/p \cdot (q^n - 1)$	→ $p$ kann nach „vorne“ gezogen werden.	$1.500.000 = 45.000 / 0,05 \cdot (1,05^n - 1)$
3	$R_n \cdot p / r = q^n - 1$	→ : $r/p$ d.h. $\cdot p/r$	$1.500.000 \cdot 0,05 / 45.000 = 1,667 = 1,05^n - 1$
4	$R_n \cdot p / r + 1 = q^n$	→ +1	$1,667 + 1 = 2,667 = 1,05^n$
5	$\ln(R_n \cdot p / r + 1) = \ln(q^n) = n \cdot \ln(q)$	→ $\ln$ / Anwenden Logarithmus-Regel	$\ln(2,667) = \ln(1,05^n) = n \cdot \ln(1,05)$
6	$n = \ln(R_n \cdot p / r + 1) / \ln(q)$	→ : $\ln(q)$	$n = \ln(2,667) / \ln(1,05) = 20,11 \rightarrow 21$ Jahre

**Aufgaben:** Stelle zunächst die Gleichung auf und forme schrittweise um.

1. Frau Schulz möchte sich ein Auto kaufen und benötigt dazu 40.000 Euro. Sie spart jedes Jahr 8.000 Euro. Wann kann Sie sich ihr Auto leisten? Zinssatz 3%
2. Herr Meyer möchte sich ein Auto für 85.000 Euro kaufen. Er zahlt am Anfang eines jeden Jahres 18.000 auf ein Konto ein. Wann kann er sich sein Auto leisten? Zinssatz 5%
3. Erwin möchte ein Boot für 185.000 Euro kaufen. Er spart jährlich vorschüssig 25.000 Euro. Zinssatz 6%. Wann kann er sich sein Boot leisten?



**Fall 2: Regelmäßiges Sparen um nach Ablauf der Zeit über eine gewisse Summe zu verfügen + bereits angespartes Kapital, welches sich zusätzlich verzinst**

Herr / Frau x möchte über Kapital in Höhe von  $R_n$  verfügen. Bis heute hat er/sie bereits  $K_0$  angespart. Zusätzlich kann er/sie am Ende jeden Jahres Kapital in Höhe von  $r$  zurücklegen.

Wie lange muss er/sie sparen? → Gesucht:  $n$

Gegeben		Beispiel
$K_0$ :	Kapital heute	Wir haben heute 1.000.000 Euro
$R_n$ :	Kapital nach $n$ Jahren	Wir benötigen 1.500.000
$p$ :	Zinssatz	5,00%
$r$ :	regelmäßige Zahlung	nachschüssig wird jedes Jahr 45.000 Euro gespart

	Formel	Was wurde gemacht ...	Beispiel
1	$R_n = K_0 \cdot q^n + r \cdot (q^n - 1) / p$	Formel aufstellen	$1.500.000 = 1.000.000 \cdot 1,05^n + 45.000 \cdot (1,05^n - 1) / 0,05$
2	$R_n = K_0 \cdot q^n + r/p \cdot (q^n - 1)$	→ $p$ kann nach „vorne“ gezogen werden.	$1.500.000 = 1.000.000 \cdot 1,05^n + 45.000 / 0,05 \cdot (1,05^n - 1)$ $45.000 / 0,05 = 900.000$
3	$R_n = K_0 \cdot q^n + r/p \cdot q^n - 1 \cdot r/p$	→ Klammer auflösen	$1.500.000 = 1.000.000 \cdot 1,05^n + 900.000 \cdot 1,05^n - 1 \cdot 900.000$
4	$R_n + r/p = K_0 \cdot q^n + r/p \cdot q^n$	→ + $r/p$	$1.500.000 + 900.000 = 1.000.000 \cdot 1,05^n + 900.000 \cdot 1,05^n$
5	$R_n + r/p = q^n \cdot (K_0 + r/p)$	→ $q^n$ ausklammern	$2.400.000 = 1,05^n \cdot (1.000.000 + 900.000)$
6	$((R_n + r/p) / (K_0 + r/p)) = q^n$	→ : $(K_0 + r/p)$	$2.400.000 / 1.900.000 = 1,26 = 1,05^n$
7	$\ln((R_n + r/p) / (K_0 + r/p)) = \ln(q^n) = n \cdot \ln(q)$	→ $\ln$ / Anwenden Logarithmus-Regel	$\ln(1,26) = \ln(1,05^n) = n \cdot \ln(1,05)$
8	$\ln((R_n + r/p) / (K_0 + r/p)) : \ln(q) = n$	→ : $\ln(q)$	$\ln(1,26) / \ln(1,05) = n = 4,8$ → Er braucht 5 Jahre.

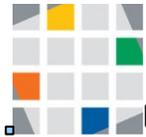


**Fall 3: Bis heute wurde ein Kapital angespart. Dieses soll dazu verwendet werden, sich eine jährliche Rente auszahlen zu lassen.**

Herr / Frau x hat bis heute Kapital in Höhe von  $R_0$  angespart. Er/sie möchte sich am Ende eines jeden Jahres eine Rente  $r$  auszahlen lassen. Wie lange kann er/sie die Rente beziehen? → Gesucht:  $n$

Gegeben		Beispiel
$R_0$ :	Kapital heute	Wir haben heute 1.000.000 Euro
$r$ :	Kapital nach $n$ Jahren	Gewünschte jährliche Rente 80.000
$p$ :	Zinssatz	5,00%

	Formel	Was wurde gemacht ...	Beispiel
1	$R_0 \cdot q^n = r \cdot (q^n - 1) / p$	Formel aufstellen / Kapital $R_0$ wird solange verzinst wie die Rente gezahlt wird.	$1.000.000 \cdot 1,05^n = 80.000 \cdot (1,05^n - 1) / 0,05$
2	$R_0 \cdot q^n = r/p \cdot (q^n - 1)$	→ $p$ kann nach „vorne“ gezogen werden.	$1.000.000 \cdot 1,05^n = 80.000 / 0,05 \cdot (1,05^n - 1)$ $80.000 / 0,05 = 1.600.000$
3	$R_0 \cdot q^n = r/p \cdot q^n - 1 \cdot r/p$	→ Klammer auflösen	$1.000.000 \cdot 1,05^n = 1.600.000 \cdot 1,05^n - 1.600.000$
4	$R_0 \cdot q^n - r/p \cdot q^n = -r/p$	→ $-r/p \cdot q^n$	$1.000.000 \cdot 1,05^n - 1.600.000 \cdot 1,05^n = -1.600.000$
5	$q^n \cdot (R_0 - r/p) = -r/p$	→ $q^n$ ausklammern	$1,05^n \cdot (1.000.000 - 1.600.000) = 1,05^n \cdot (-600.000) = -1.600.000$
6	$q^n = (-r/p) / (R_0 - r/p)$	→ : $(R_0 - r/p)$	$1,05^n = -1.600.000 / (-600.000) = 2,67$
7	$\ln(q^n) = n \cdot \ln(q) = \ln((-r/p) / (R_0 - r/p))$	→ $\ln$ / Anwenden Logarithmus-Regel	$\ln(1,05^n) = n \cdot \ln(1,05) = \ln(2,67)$
8	$n = \ln((-r/p) / (R_0 - r/p)) : \ln(q)$	→ : $\ln(q)$	$\ln(2,67) / \ln(1,05) = n = 20,13$ → Er braucht 21 Jahre.

**Aufgaben – Fall 2**

1. Emma benötigt zum Kauf ihrer Wohnung 150.000 Euro. 25.000 Euro hat sie schon gespart. 10.000 Euro legt sie nachschüssig jedes Jahr an. Wann kann sie sich ihre Wohnung leisten? Zinssatz 3%
2. Max benötigt zum Kauf seiner Wohnung 350.000 Euro. 50.000 Euro hat er schon gespart. 20.000 Euro legt er vorschüssig jedes Jahr an. Wann kann er sich seine Wohnung leisten? Zinssatz 4%
3. Franzi benötigt zum Kauf ihrer Wohnung 750.000 Euro. 45.000 Euro hat sie schon gespart. 150.000 Euro legt sie nachschüssig jedes Jahr an. Wann kann sie sich ihre Wohnung leisten? Zinssatz 5%

**Aufgaben – Fall 3**

4. Emma verfügt über 750.000 Euro. Sie möchte sich diese Summe als regelmäßige Rente (nachschüssig) in Höhe von 45.000 auszahlen lassen. Wie lange kann sie diese Rente beziehen? Zinssatz 3%
5. Max hat 850.000 Euro angespart. Er möchte sich eine regelmäßige Rente am Anfang eines jeden Jahres in Höhe von 50.000 Euro auszahlen lassen. Wie lange kann sie diese Rente beziehen? Zinssatz 4%
6. Franzi verfügt über 50.000 Euro. Sie möchte sich diese Summe als regelmäßige Rente in Höhe von 6000 Euro am Ende des Jahres auszahlen lassen. Wie lange kann sie diese Rente beziehen? Zinssatz 5%