

Das Charakteristische bei einem Annuitätendarlehen ist, dass die Schulden durch jährlich gleichbleibende Zahlungen, sogenannte Annuitäten (hier „A“, bei der Rentenrechnung „r“), zurückgezahlt werden. Eine **Annuität** besteht aus **Zins-** und **Tilgungsanteil**. Im Zeitablauf nimmt der Zinsanteil ab und der Tilgungsanteil steigt um den entsprechenden Betrag.

$$K_0 \cdot q^n = A \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Beispielaufgabe 1:

Unternehmer Darek kauft eine Maschine für 300.000 € ($K_0 = 300.000$ €). Die Bank verlangt einen Zinssatz von $p \% = 7,45 \%$, bei einer Laufzeit von $n = 10$ Jahren.

Gesucht ist die Annuität: $A = ?$

$$A = K_0 \cdot q^n \cdot \frac{q - 1}{q^n - 1}$$

$$A = 43.606,05 [\text{€}]$$

- Tilgungsplan:

Jahre	Restschuld am	Annuität		Restschuld am
	Jahresanfang (RS a)	Zinsen	Tilgung	Jahresende (RS e)
1	300.000,00 €	22.350,00 €	21256,05	278.743,95 €
2	278.743,95 €	20.766,42 €	22839,62	255.904,33 €
3	255.904,33 €	19.064,87 €	24541,18	231.363,15 €
4	231.363,15 €	17.236,55 €	26369,49	204.993,66 €
5	204.993,66 €	15.272,03 €	28334,02	176.659,63 €
6	176.659,63 €	13.161,14 €	30444,91	146.214,73 €
7	146.214,73 €	10.893,00 €	32713,05	113.501,68 €
8	113.501,68 €	8.455,87 €	35150,17	78.351,50 €
9	78.351,50 €	5.837,19 €	37768,86	40.582,64 €
10	40.582,64 €	3.023,41 €	40582,64	0,00 €

Rechnung

$Z = p\% \cdot \text{RS a}$ $T = A - Z$

$\text{RS e} = \text{RS a} - T$

Beispielaufgabe 2:

Unternehmerin Magda möchte in ihr Unternehmen investieren. Sie kann jährlich 100.000 € ($A = 100.000$ €) aufbringen, um ein Darlehen zurückzuzahlen. Die Laufzeit beträgt $n = 10$ bei einem Zinssatz von $p \% = 8,25 \%$.

Berechne, welchen Kreditbetrag Monika unter diesen Bedingungen aufnehmen kann. (gesucht: K_0)

$$K_0 = 100.000 \cdot \frac{1,0825^{10} - 1}{0,0825 \cdot 1,0825^{10}} = 663.507,07 [\text{€}]$$



Bei **privaten Bauherren** wird die Annuität anders bestimmt, da hier in der Regel eine längere Laufzeit gewählt wird.

Beispielaufgabe 3:

$$\text{Private Bauherren: } A = K_0 \cdot \frac{p}{100} + K_0 \cdot \frac{1}{100} = K_0 \cdot \frac{p+1}{100}$$

$$K_0 = 200.000 \text{ €}, q = 1,08 \quad \rightarrow \quad A = 18.000 \text{ €}$$

gesucht: $n = ?$

$$200.000 \cdot 1,08^n = 18.000 \cdot \frac{1,08^n - 1}{1,08 - 1}$$

$$\Leftrightarrow 1,08^n = 9 \Leftrightarrow n = \frac{\log 9}{\log 1,08} \approx 28,55$$

Allgemein gilt die Formel zur Laufzeitberechnung:

$$n = \frac{\lg \left[\frac{A}{A - K_0 \cdot (q-1)} \right]}{\lg q}$$

Nun kann man noch mit der Formel für die Restschuld nach n Jahren:

$$RS_n = K_0 \cdot q^n - A \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \text{berechnen:}$$

Restschuld nach 28 Jahren:

$$200.000 \cdot 1,08^{28} - 18.000 \cdot \frac{1,08^{28} - 1}{1,08 - 1} \approx 9.322,34 \quad \text{Restschuld}$$

$$\text{Zahlung im 29. Jahr: } 9.322,34 \cdot 1,08 \approx 10.068,13$$

Weitere wichtige Formeln:

- Tilgungsanteil im n. Jahr: $T_n = T_1 \cdot q^{n-1}$
- Bis zum k-ten Jahr getilgt: $K_k = T_1 \cdot \frac{q^k - 1}{q - 1}$, mit $T_1 = A - K \cdot \frac{p}{100}$