Betriebsoptimum (BO) und langfristige Preisuntergrenze (LPU)

Die langfristige Preisuntergrenze beschreibt den niedrigsten Stück-Preis (GE pro ME), den ein Unternehmen für sein Produkt nehmen muss, um langfristig keine Verluste zu machen. (Unter diesem Preis sollte das Unternehmen sein Produkt nicht anbieten, da es sonst Verluste machen würde auf lange Sicht gesehen.)

Das Betriebsoptimum gibt dabei die Menge (x-Wert) an, die produziert werden muss, um das Produkt für diesen Stückpreis anbieten zu können.

Folgende Gesamtkostenfunktion ist gegeben: $K(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 32$

Um die Stückkosten zu bestimmen, muss ich die Gesamtkosten durch die produzierte Menge teilen. Beispiel:

Wenn 6 ME produziert werden, fallen Gesamtkosten in Höhe von

$K(6) = 6^3 - 6 \cdot 6^2 + 12 \cdot 6 + 32 = 104\ (GE)$ an. Für 6 ME betragen die Gesamtkosten 104 GE. Die Stückkosten (auch Durchschnittskosten genannt) liegen dann bei 104 GE pro 6 ME,

also $\frac{104}{6}$ GE/ME und damit 17,33 GE/ME.

Allgemein berechnet man die Stückkosten, indem man die Gesamtkosten K(x) durch die Menge x teilt. Man erhält die Stückkostenfunktion k(x)

$$k(x) = \frac{K(x)}{x} = \frac{x^3-6x^2+12x+32}{x} = \frac{x^3}{x} - \frac{6x^2}{x} + \frac{12x}{x} + \frac{32}{x} = x^2 - 6x + 12 + \frac{32}{x}$$

Die Stückkostenfunktion lautet also $k(x) = x^2 - 6x + 12 + \frac{32}{x}$

Man kann nun die Stückkosten für 6 ME (aus dem Beispiel) direkt berechnen, indem man x=6 in die Stückkostenfunktion einsetzt:

$$k(6) = 6^2 - 6 \cdot 6 + 12 + \frac{32}{6} = 17{,}33\ ({}^{GE}/_{ME})$$

Das **BO** und die **LPU** sind das **Minimum (Tiefpunkt) der Stückkostenfunktion k(x)**.

Ableitungen:

$$k(x) = x^2 - 6x + 12 + \frac{32}{x}$$

$$k'(x) = 2x - 6 - \frac{32}{x^2}$$

$$k''(x) = 2 + \frac{64}{x^3}$$

$\frac{32}{x} = 32\,x^{-1}$ (Potenzgesetz $\frac{a}{x^n} = a \cdot x^{-n}$)

Ableiten: $(32\,x^{-1})' = -1 \cdot 32x^{-1-1} = -32x^{-2} = -\frac{32}{x^2}$

In der zweiten Ableitung wird dann aus $-32x^{-2} = -\frac{32}{x^2}$

$(-32x^{-2})' = -2 \cdot -32x^{-2-1} = 64x^{-3} = \frac{64}{x^3}$

NB: k‘(x)=0

$$2x - 6 - \frac{32}{x^2} = 0 \qquad | \cdot x^2$$

Da das x^2 im Nenner des Bruches stört, wenn man die Gleichung lösen möchte, kann man die Gleichung mit dem Nenner multiplizieren.

$$2x \cdot x^2 - 6 \cdot x^2 - \frac{32}{x^2} \cdot x^2 = 0 \cdot x^2$$

$$2x^3 - 6x^2 - 32 = 0$$

TR: $a = 2, \quad b = -6, \quad c = 0, \quad d = -32$

➔ $x_1 = 4$

$\left(x_2 \text{ und } x_3, \text{die der TR auch angibt, liegen in den complexen Zahlen und gelten für uns nicht (Zahl mit dem i am Ende)}\right)$

HB: k‘(x)=0 ^ k‘‘(x) > 0

$k''(4) = 2 + \frac{64}{4^3} = 3 > 0$ → Tiefpunkt bei x = 4

$\boldsymbol{Die\ Menge\ x = 4\ (ME) ist\ das\ Betriebsoptimum}.$

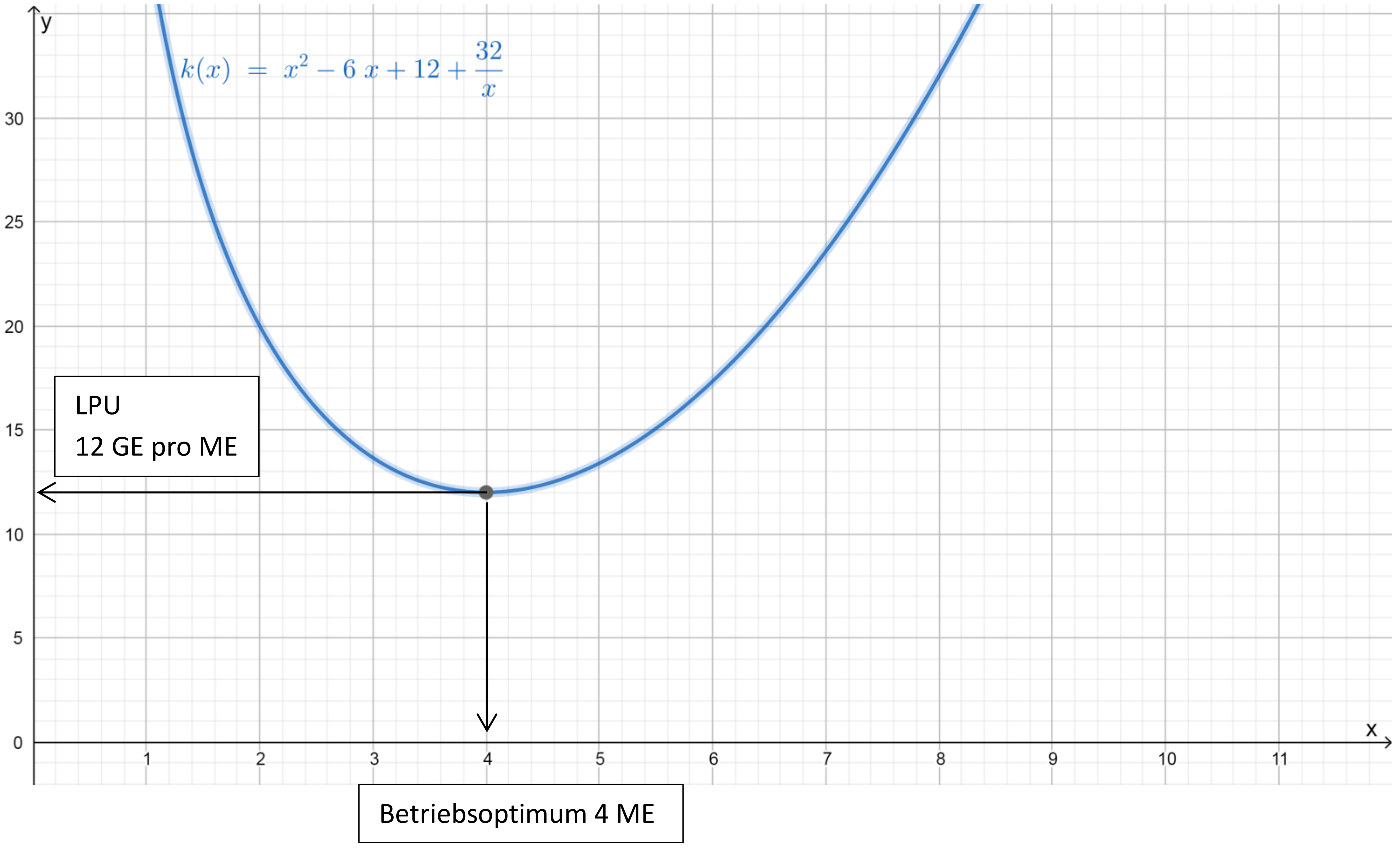
y-Wert bestimmen:

$$k(x) = x^2 - 6x + 12 + \frac{32}{x}$$

$$k(4) = 4^2 - 6 \cdot 4 + 12 + \frac{32}{4} = 12\ \left({}^{GE}/_{ME}\right)$$

$Die\ langfrsitige\ Preisuntergrenze\ beträgt\ 12\ {}^{GE}/_{ME}\ ,$

$wenn\ 4\ ME\ produziert\ werden.$



Arbeitsauftrag

1. Gegeben ist eine Gesamtkostenfunktion K. Bestimme jeweils die Stückkostenfunktion k(x) sowie deren 1. und 2. Ableitung.

a) $K(x)= 0{,}02x^3 - 1{,}5x^2 + 90x + 100$

b) $K(x)=110x^3 - 125x^2 + 30x + 640.$

c) $K(x) = 3x^3 - 45x^2 + 300x + 192$

2. Bestimme jeweils das BO sowie die LPU für die 3 Funktionen.
Zur Kontrolle: a) $(39{,}13|64{,}48)$ *b)* $(1{,}64|511{,}1)$