Übungsaufgaben zu quadratischen Gleichungen und Parabeln

Binomische Formeln:

1. binomische Formel: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2. binomische Formel: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3. binomische Formel: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Lösungsformel für quadratische Gleichungen (Mitternachtsformel):

1. Möglichkeit: p-q-Formel

Die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ besitzt die Lösungsformel $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

2. Möglichkeit: abc-Formel

Die Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ besitzt die Lösungsformel $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Scheitelpunkte von Parabeln:

1.Fall: Die Parabel $y = a \cdot x^2$ besitzt den Scheitelpunkt S(0/0).

2.Fall: Die Parabel $y = a \cdot x^2 + c$ besitzt den Scheitelpunkt S(0/c).

3.Fall: Bei der Parabel $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ kann der Scheitelpunkt anhand der Gleichung <u>nicht</u> abgelesen werden.
Die Parabelgleichung muss in die Scheitelform $y = a \cdot (x - x_S) + y_S$ umformt werden.
Der Scheitelpunkt hat die Koordinaten $S(x_S / y_S)$.
Ist a = 1, handelt es sich um eine nach oben geöffnete Normalparabel.
Ist a = -1, handelt es sich um eine nach unten geöffnete Normalparabel.
Nimmt a einen anderen Wert an, ist es keine Normalparabel.

Zeichnen von Parabeln:

1.Fall: Die nach oben geöffnete Normalparabel $y = x^2 + ...$ kann mit Hilfe einer Parabelschablone und ihres Scheitelpunktes gezeichnet werden.

2.Fall: Die nach unten geöffnete Normalparabel $y = -x^2 + ...$ kann mit Hilfe einer Parabelschablone und ihres Scheitelpunktes gezeichnet werden.

3.Fall: Die Nicht-Normalparabel $y = a \cdot x^2 + ...$ (a entspricht irgendeiner Zahl außer ± 1) wird mit Hilfe einer Wertetabelle (die auch der GTR liefert) gezeichnet.

Nullstellen einer Parabel:

Die Nullstellen einer Parabel entsprechen den Schnittpunkten mit der x-Achse.
Hierzu muss der y-Wert der Parabelgleichung 0 gesetzt und die daraus entstehende quadratische Gleichung gelöst werden.

Prüfung, ob ein gegebener Punkt auf einer Parabel liegt:
Die Koordinaten des Punktes werden in die Parabelgleichung eingesetzt.
Entsteht dadurch eine wahre Aussage (z.B. 1 = 1), liegt der Punkt auf der Parabel. Entsteht eine falsche Aussage (z.B. 3 = 9), liegt der Punkt nicht auf der Parabel.

Aufgabe 1:
Löse die folgenden quadratischen Gleichungen:
a) $4x^2 + 17x - 15 = 0$ b) $10x^2 - 13x - 144 = 0$
c) $20x^2 + 31x + 12 = 0$ d) $2x^2 - 3x + 1 = 0$
e) $(2x - 17) \cdot (x - 5) - (3x + 1) \cdot (x - 7) = 84$
f) $(2x - 5)^2 - 80 = (x - 6)^2$ g) $(1 + 3x)(1 - 3x) - x(x + 1) = 2x^2$

Aufgabe 2:
Gib zu den folgenden Parabeln die Koordinaten des Scheitelpunkts und die Gleichung der Symmetrieachse an. Gib außerdem an, ob die Parabel nach oben oder unten geöffnet ist und ob sie steiler oder flacher als die Normalparabel ist.
a) $f(x) = 0{,}4x^2 + 3$ b) $f(x) = (x + 2)^2 + 5$ c) $f(x) = -2(x - 2)^2 - 2$

Aufgabe 3:
Zeichne die Schaubilder der folgenden Parabeln (falls möglich mit Hilfe einer Schablone).
a) $f(x) = -x^2 - 1$ b) $f(x) = -(x + 4)^2 - 2$ c) $f(x) = (x - 4)^2 + 2$

Aufgabe 4:
Bestimme von folgenden Parabelgleichungen den Scheitelpunkt.
a) $y = x^2 - 4x + 1$ b) $y = -x^2 + 3x - 2$ c) $y = \frac{1}{3}x^2 + x - 2$

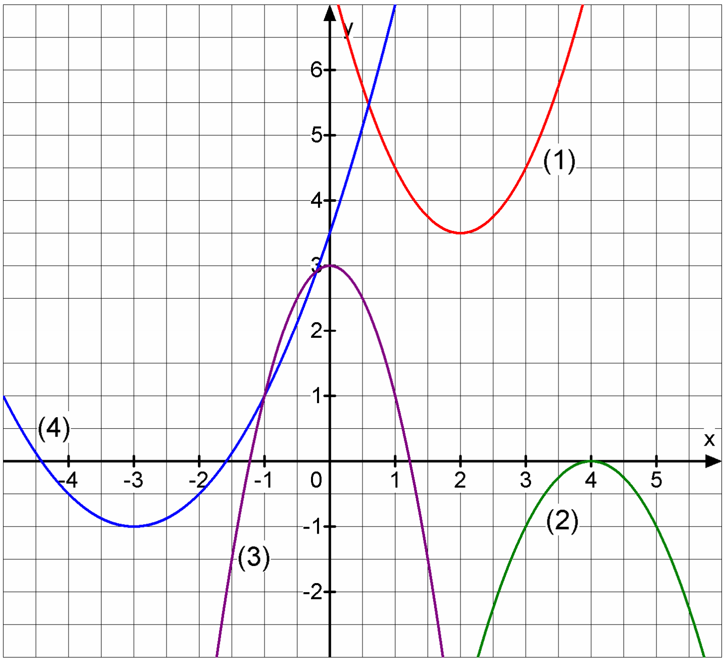
Aufgabe 5:
Stelle die Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion auf, deren Schaubild eine Normalparabel ist, die
a) nach unten geöffnet ist und um 2 Einheiten nach rechts verschoben wurde.
b) nach oben geöffnet ist und um 1 Einheit nach links und um 6 Einheiten nach unten verschoben wurde.

Aufgabe 6:
Was kannst du über den Scheitelpunkt einer quadratischen Funktion sagen
a) die als Schaubild eine Parabel mit den Nullstellen bei x = -5 und x = 1 hat.
b) deren Schaubild nach oben geöffnet ist und die nur eine Nullstelle N(2/0) hat.

Aufgabe 7:
Schreibe die Funktionsgleichungen der folgenden quadratischen Funktionen in der Normalform. Prüfe rechnerisch, ob die gegebenen Punkte jeweils auf dem Schaubild der Funktion liegen.
a) $f(x) = (x - 2{,}5)^2 - 2{,}25$ A(0/-4) B(-4/40)
b) $f(x) = -0{,}5(x + 4)^2 + 4$ C(1/-8,5) D(-2/-2)

Aufgabe 8:
Stelle die Gleichung einer Parabel mit dem Scheitel S(3/-2) auf, welche durch den Ursprung verläuft.

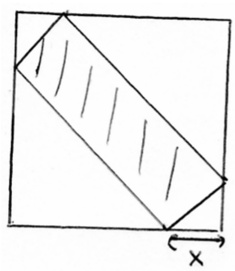
Aufgabe 9:
Bestimme die Funktionsgleichungen der Parabeln in dem Schaubild.



Aufgabe 10:
Ein Ball, der von einem Jungen in 1,5 Meter Höhe abgeworfen wird, erreicht nach 20 Metern mit 8 Metern über dem Boden seinen höchsten Punkt.
a) Skizziere die Situation in einem Koordinatensystem.
b) Bestimme die Gleichung der parabelförmigen Flugbahn des Balles.

Aufgabe 11:
In einem Theater soll eine Aufführung stattfinden. Um die entstehenden Kosten zu decken, soll der Eintritt für die Veranstaltung 10 € betragen. Es werden dann 300 Zuschauer erwartet. Aus Erfahrung weiß man, dass bei einer Senkung des Eintrittspreises um 0,50 € die Zuschauerzahl um jeweils 30 Personen steigern wird. Wie muss der Eintrittspreis kalkuliert werden, damit möglichst hohe Einnahmen entstehen ?

Aufgabe 12:
Das Cover einer CD soll neu gestaltet werden. Dazu soll ein Rechteck möglichst großen Flächeninhalts in das Cover eingeschrieben werden. Das quadratische Cover einer CD hat eine Seitenlänge von 13 cm. Wie groß kann die Fläche des Rechtecks maximal werden ?



Musterlösungen zu quadratischen Gleichungen und Parabeln

Aufgabe 1:
Die Lösung wird mit Hilfe der p-q-Formel dargestellt.
Die Gleichungen können auch mit Hilfe der abc-Formel gelöst werden. Die Lösungen sind jeweils die gleichen.

a) $4x^2 + 17x - 15 = 0 \;|: 4$

$\Leftrightarrow x^2 + \frac{17}{4}x - \frac{15}{4} = 0$

p-q-Formel: $x_{1,2} = -\frac{17}{8} \pm \sqrt{\left(\frac{17}{8}\right)^2 + \frac{15}{4}} = -\frac{17}{8} \pm \frac{23}{8}$

Daraus folgt $x_1 = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ und $x_2 = -\frac{40}{8} = -5$

b) $10x^2 - 13x - 144 = 0 \;|:10$

$\Leftrightarrow x^2 - \frac{13}{10}x - \frac{72}{5} = 0$

p-q-Formel: $x_{1,2} = \frac{13}{20} \pm \sqrt{\left(-\frac{13}{20}\right)^2 + \frac{72}{5}} = \frac{13}{20} \pm \frac{77}{20}$

Daraus folgt $x_1 = \frac{90}{20} = \frac{9}{2}$ und $x_2 = -\frac{64}{20} = -\frac{16}{5}$

c) $20x^2 + 31x + 12 = 0 \;|: 20$

$\Leftrightarrow x^2 + \frac{31}{20}x + \frac{3}{5} = 0$

p-q-Formel: $x_{1,2} = -\frac{31}{40} \pm \sqrt{\left(\frac{31}{40}\right)^2 - \frac{3}{5}} = -\frac{31}{40} \pm \frac{1}{40}$

Daraus folgt $x_1 = -\frac{30}{40} = -\frac{3}{4}$ und $x_2 = -\frac{32}{40} = -\frac{4}{5}$

d) $2x^2 - 3x + 1 = 0 \;|: 2$

$\Leftrightarrow x^2 - 1{,}5x + 0{,}5 = 0$

p-q-Formel: $x_{1,2} = 0{,}75 \pm \sqrt{(-0{,}75)^2 - 0{,}5} = 0{,}75 \pm 0{,}25$

Daraus folgt $x_1 = 1$ und $x_2 = 0{,}5$

e) $(2x - 17)\cdot(x - 5) - (3x + 1)\cdot(x - 7) = 84$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 10x - 17x + 85 - (3x^2 - 21x + x - 7) = 84$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 27x + 85 - 3x^2 + 21x - x + 7 = 84$

$\Leftrightarrow -x^2 - 7x + 8 = 0 \;|: (-1)$

$\Leftrightarrow x^2 + 7x - 8 = 0$

p-q-Formel: $x_{1,2} = -3{,}5 \pm \sqrt{3{,}5^2 + 8} = -3{,}5 \pm 4{,}5$

Daraus folgt $x_1 = 1$ und $x_2 = -8$

f) $(2x-5)^2 - 80 = (x-6)^2$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 20x + 25 - 80 = x^2 - 12x + 36$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 8x - 91 = 0 \quad | :3$

$\Leftrightarrow x^2 - \frac{8}{3}x - \frac{91}{3} = 0$

p-q-Formel: $x_{1,2} = \frac{4}{3} \pm \sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2 + \frac{91}{3}} = \frac{4}{3} \pm \frac{17}{3}$

Daraus folgt $x_1 = 7$ und $x_2 = -\frac{13}{3}$

g) $(1+3x)(1-3x) - x(x+1) = 2x^2$

$\Leftrightarrow 1 - 9x^2 - x^2 - x = 2x^2$

$\Leftrightarrow -12x^2 - x + 1 = 0 \quad | : (-12)$

$\Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{12}x - \frac{1}{12} = 0$

p-q-Formel: $x_{1,2} = -\frac{1}{24} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{24}\right)^2 + \frac{1}{12}} = -\frac{1}{24} \pm \frac{7}{24}$

Daraus folgt $x_1 = \frac{1}{4}$ und $x_2 = -\frac{1}{3}$

Aufgabe 2:

a) $f(x) = 0{,}4x^2 + 3$

Die Parabel besitzt den Scheitelpunkt S(0/3). Sie ist nach oben geöffnet und flacher als eine Normalparabel.

b) $f(x) = (x+2)^2 + 5$

Die Parabel besitzt den Scheitelpunkt S(-2/5). Sie ist nach oben geöffnet und ist eine Normalparabel.

c) $f(x) = -2(x-2)^2 - 2$

Die Parabel besitzt den Scheitelpunkt S(2/-2). Sie ist nach unten geöffnet und ist steiler als eine Normalparabel.

Aufgabe 3:

a) $f(x) = -x^2 - 1$

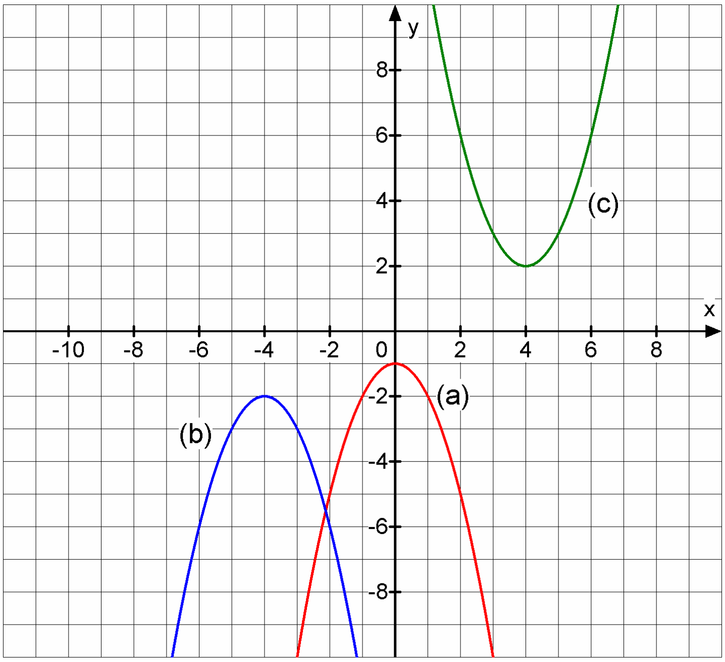
Es handelt sich um eine nach unten geöffnete Normalparabel mit Scheitel S(0/-1).

b) $f(x) = -(x+4)^2 - 2$

Es handelt sich um eine nach unten geöffnete Normalparabel mit Scheitel S(-4/-2).

c) $f(x) = (x-4)^2 + 2$

Es handelt sich um eine nach oben geöffnete Normalparabel mit Scheitel S(4/2).



Aufgabe 4:

a) $y = x^2 - 4x + 1$ (nach oben geöffnete Normalparabel)

Umformung in Scheitelform: $f(x) = (x-2)^2 - 4 + 1 \Leftrightarrow f(x) = (x-2)^2 - 3$

Der Scheitelpunkt lautet S(2/-3).

b) $y = -x^2 + 3x - 2 \quad | : (-1)$ (nach unten geöffnete Normalparabel)

$\Leftrightarrow \frac{y}{-1} = x^2 - 3x + 2 \Leftrightarrow \frac{y}{-1} = (x-1{,}5)^2 - 2{,}25 + 2 \Leftrightarrow \frac{y}{-1} = (x-1{,}5)^2 - 0{,}25$

$\Leftrightarrow y = -(x-1{,}5)^2 + 0{,}25$

Der Scheitelpunkt lautet S(1,5/0,25).

c) $y = \frac{1}{3}x^2 + x - 2 \quad | : \frac{1}{3}$ (keine Normalparabel, nach oben geöffnet)

$\Leftrightarrow \frac{y}{\frac{1}{3}} = x^2 + 3x - 6 \Leftrightarrow \frac{y}{\frac{1}{3}} = (x+1{,}5)^2 - 2{,}25 - 6 \Leftrightarrow \frac{y}{\frac{1}{3}} = (x+1{,}5)^2 - 8{,}25$

$\Leftrightarrow y = \frac{1}{3}(x+1{,}5)^2 - 2{,}75$

Der Scheitelpunkt lautet S(-1,5/-2,75).

Aufgabe 5:

a) Der Scheitelpunkt der Normalparabel lautet S(2/0).

Die Gleichung der Parabel in Scheitelform lautet $y = -(x-2)^2$.

(Das Minuszeichen vor der Klammer ist erforderlich, da die Parabel nach unten geöffnet ist)

b) Der Scheitelpunkt der Normalparabel lautet S(-1/-6).

Die Gleichung der Parabel in Scheitelform lautet $y = (x+1)^2 - 6$

Aufgabe 6:

a) Der x-Wert des Scheitelpunktes befindet sich genau in der Mitte von beiden Nullstellen. Die Mitte von – 5 und 1 ist x = -2. Somit lautet der Scheitelpunkt S(2/y). Der y-Wert kann aufgrund der Angaben in der Aufgabe nicht bestimmt werden.

b) Wenn die Parabel nur eine Nullstelle hat, dann stimmt der Scheitelpunkt mit der Nullstelle überein, d.h. es gilt S(2/0).

Aufgabe 7:

a) $f(x) = (x-2{,}5)^2 - 2{,}25 \Leftrightarrow f(x) = x^2 - 5x + 6{,}25 - 2{,}25 \Leftrightarrow f(x) = x^2 - 5x + 4$

Test, ob A(0/-4) auf der Parabel liegt: $-4 = 0^2 - 5 \cdot 0 + 4$ ist falsch; A liegt nicht darauf

Test, ob B(-4/40) auf der Parabel liegt: $40 = (-4)^2 - 5 \cdot (-4) + 4$ ist richtig; B liegt darauf

b) $f(x) = -0{,}5(x+4)^2 + 4 \Leftrightarrow f(x) = -0{,}5(x^2 + 8x + 16) + 4 \Leftrightarrow f(x) = -0{,}5x^2 - 4x - 4$

Test, ob C(1/-8,5) auf der Parabel liegt: $-8{,}5 = -0{,}5 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 4$ ist richtig; C liegt darauf

Test, ob D(-2/-2) auf der Parabel liegt: $-2 = -0{,}5 \cdot (-2)^2 - 4 \cdot (-2) - 4$ ist falsch; D liegt nicht darauf

Aufgabe 8:

Da der Scheitelpunkt bekannt ist, muss die Parabel in Scheitelform aufgestellt werden:

$f(x) = a \cdot (x-3)^2 - 2$

Der Wert von a kann nun aufgrund des bekannten Parabelpunktes O(0/0) berechnet werden:

Einsetzen von O(0/0): $0 = a \cdot (0-3)^2 - 2 \Leftrightarrow 0 = 9a - 2 \Leftrightarrow a = \frac{2}{9}$

Die Parabelgleichung lautet $f(x) = \frac{2}{9} \cdot (x-3)^2 - 2$

Aufgabe 9:

Parabel (1): Scheitelpunkt S(2/4), es ist eine nach oben geöffnete Normalparabel
Gleichung: $y = (x-2)^2 + 4$

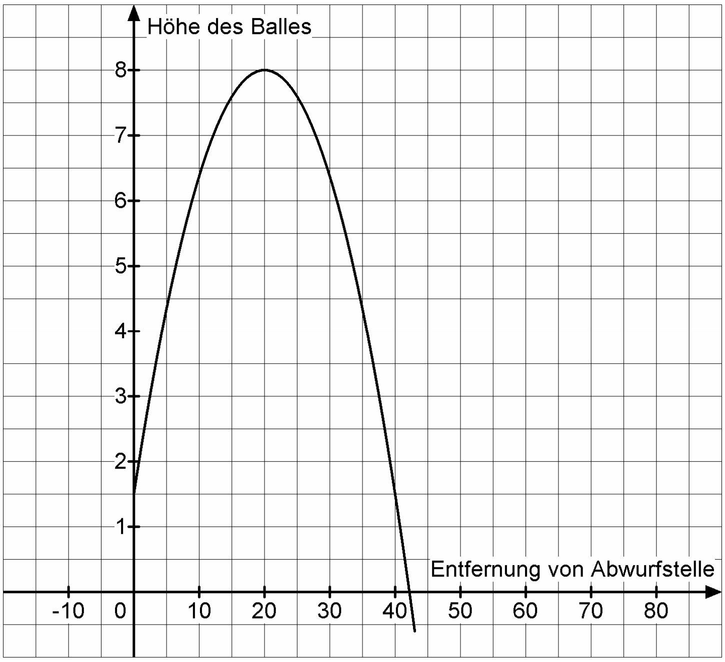
Parabel (2): Scheitelpunkt S(4/0), es ist eine nach unten geöffnete Normalparabel
Gleichung: $y = -(x-4)^2$

Parabel (3): Scheitelpunkt S(0/3), es ist eine nach unten geöffnete Parabel mit dem Streckfaktor 2
Gleichung: $y = -2x^2 + 3$

Parabel (4): Scheitelpunkt S(-3/-1), es ist eine nach oben geöffnete Parabel mit dem Streckfaktor 0,5
Gleichung: $y = 0{,}5(x+3)^2 - 1$

Aufgabe 10:

a) Schaubild:



b) Die Parabel besitzt den Scheitelpunkt S(20/8). Die Abwurfstelle des Balles sei an der Stelle x = 0. Also liegt auch der Punkt P(0/1,5) auf der Parabel.

Parabelgleichung: $y = a \cdot (x-20)^2 + 8$

Einsetzen von P(0/1,5): $1{,}5 = a \cdot (0-20)^2 + 8 \Leftrightarrow a = -0{,}01625$

Die Gleichung der Flugbahn lautet $y = -0{,}01625 \cdot (x-20)^2 + 8$

Aufgabe 11:

Es sei x die Anzahl der Preissenkungen um jeweils 0,50 €.
Bei x Preissenkungen beträgt der Eintrittspreis 10 – 0,5x.
Die Anzahl der Zuschauer nach x Preissenkungen beträgt 300 + 30x.

Die Gesamteinnahmen bei x Preissenkungen betragen $y = (10 - 0{,}5x) \cdot (300 + 30x)$

Daraus folgt $y = 3000 + 300x - 150x - 15x^2 \Leftrightarrow y = -15x^2 + 150x + 3000$

Da nun ermittelt werden soll, für welchen x-Wert der y-Wert möglichst groß wird, muss der Scheitelpunkt der Parabel ermittelt werden:

$$\frac{y}{-15} = x^2 - 10x - 200 \Leftrightarrow \frac{y}{-15} = (x-5)^2 - 25 - 200 \Leftrightarrow y = -15(x-5)^2 + 3375$$

Für x = 5 ergibt sich ein maximaler Wert von 3375.
Nach 5 Preissenkungen (d.h. Eintrittspreis = 7,50 €) betragen die maximalen Einnahmen 3.375€.

Aufgabe 12:
Fläche des Rechtecks = $13 \cdot 13 - 2 \cdot A_{kleinesDreieck} - 2 \cdot A_{großesDreieck}$

$$A_{kleinesDreieck} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot x = \frac{1}{2} x^2$$

$$A_{großesDreieck} = \frac{1}{2} \cdot (13 - x) \cdot (13 - x) = \frac{1}{2}(169 - 26x + x^2) = 84{,}5 - 13x + 0{,}5x^2$$

$$A_{Rechteck} = 169 - 2 \cdot \frac{1}{2} x^2 - 2 \cdot (84{,}5 - 13x + 0{,}5x^2) = 169 - x^2 - 169 + 26x - x^2 = -2x^2 + 26x$$

Da nun ermittelt werden soll, für welchen Wert von x die Fläche des Rechtecks maximal werden soll, wird von der Funktion der Scheitelpunkt berechnet.

$$y = -2x^2 + 26x \quad | : (-2)$$

$$\frac{y}{-2} = x^2 - 13x \Leftrightarrow \frac{y}{-2} = (x - 6{,}5)^2 - 42{,}25 \Leftrightarrow y = -2(x - 6{,}5)^2 + 84{,}5$$

Für x = 6,5 wird die Rechtecksfläche maximal 84,5 cm² groß.